EIN BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG SCHWACH NICHTLINEARER ÜBERTRAGUNGSSYSTEME

von

Horst Hänel

Erlangen 1987

Disbui.Erlangen
1986

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

EIN BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG SCHWACH NICHTLINEARER ÜBERTRAGUNGSSYSTEME

Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

DOKTOR-INGENIEUR

vorgelegt von

Horst Hänel

Erlangen 1987

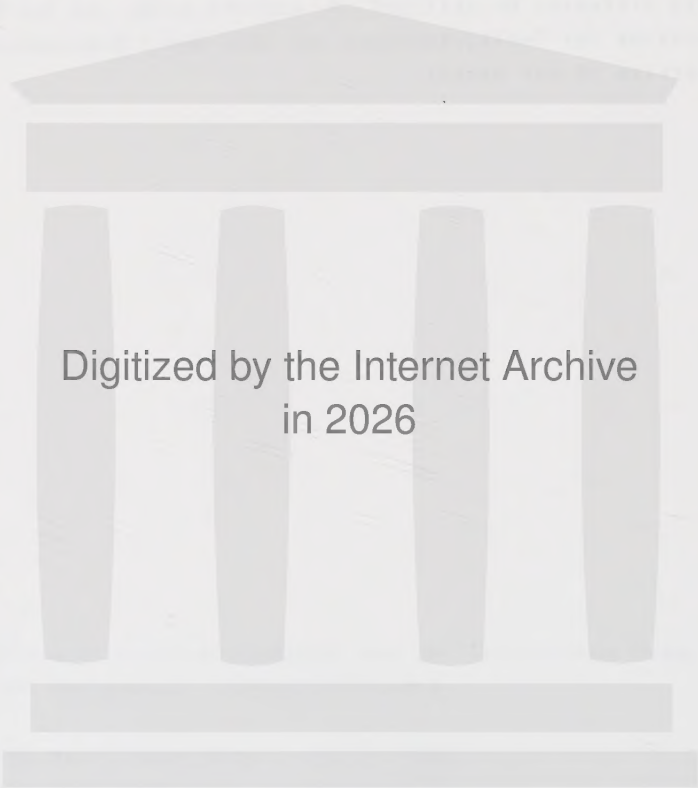
Als Dissertation genehmigt von der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 18. 6. 1985
Tag der Promotion: 19. 2. 1986

Dekan: Prof. Dr.-Ing. H. Brand
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. H. W. Schüßler
Prof. Dr.phil.nat. H. Schlitt

Herrn Professor Dr.-Ing. H. W. Schüßler gebührt mein Dank für die interessante Aufgabenstellung, die zahlreichen Anregungen und Hinweise und für seine Unterstützung bei der Abfassung der Niederschrift.

Herrn Professor Dr.phil.nat. H. Schlitt danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens und sein damit bekundetes Interesse an der Arbeit.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538124_0012

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	3
Einleitung und Übersicht	7
1. Fehlerdefinitionen	9
1.1. Ideales lineares Ersatzsystem	10
1.2. Äquivalente Verstärkung	11
1.3. Systemmodellierung	12
1.4. Klirrfaktormessung	13
1.5 Rauschklirrmeßverfahren	15
2. Verallgemeinertes Rauschklirrmeßverfahren	16
2.1. Prinzip des Meßverfahrens	16
2.2. Genauigkeit des Meßverfahrens	19
2.2.1. Meßobjektabhängige Genauigkeit	19
2.2.2. Genauigkeit der Leistungsdichtemessung	20
2.2.3. Genauigkeit der Messung der komplexen Übertragungsfunktion	27
2.3. Realisierter Meßaufbau	33
2.3.1. Funktionsbeschreibung	33
2.3.2. Dimensionierung hinsichtlich optimaler Genauigkeit	36
2.3.3. Dimensionierung hinsichtlich maximaler Dynamik	42
2.3.4. Dimensionierung der Auswerte- und Steuereinheit	49
2.3.5. Technische Daten	68
3. Meßsignale	73
3.1. Natürliche Signale	73
3.2. Modellsignal mit vorgebbarer Amplitudenverteilung und Autokorrelationsfunktion	75
3.2.1. Digitale Erzeugung einer gaußverteilten Zufallsfolge mit weißem Spektrum	83

3.2.2. Realisierter Modellsignalgenerator für den Rauschklirrmeßplatz 112

4. Meßergebnisse und Diskussion 124

4.1. Testmessungen 124

4.1.1. Gedächtnislose schwache Nichtlinearität 125

4.1.2. Rundungsstelle eines rekursiven Filterblocks zweiten Grades 130

4.2. PCM-Systeme 133

4.2.1. Lineare PCM 133

4.2.2. Logarithmische PCM 152

4.2.3. Differentielle PCM 166

4.3. Deltamodulation 180

4.3.1. Lineare Deltamodulation 182

4.3.2. Adaptive Deltamodulation mit Momentanwertkompandierung 190

4.3.3. Adaptive Deltamodulation mit Silbenkompandierung 193

5. Zusammenfassung 196

Anhänge 198

Literaturverzeichnis 230

VERZEICHNIS DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN

Größen und Signale

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$	Amplituden eines Sinussignals
a_D, a_S	Dämpfung in Durchlaß- bzw Sperrbereich
$a_\cdot, b_\cdot, c_\cdot, d_\cdot$	Polynomkoeffizienten ($\cdot$ Index)
$b(t), b(kT)$	binäres Signal
$C(\omega)$	charakteristische Funktion
$e_\cdot(t)$	Differenzsignal ($\cdot$ Index)
$f(x)$	nichtlineare Funktion
f, f_A, f_m	Frequenz, Abtast-, Mitten- bzw. Meßfrequenz
$g(x)$	Funktion
$g_{m,\varkappa}$	Mod-2-Funktion (PN-Folge)
$h_0(t), h_0(k)$	Impulsantwort
$H_\cdot(j\omega)$	Übertragungsfunktion ($\cdot$ Index)
$H_n(x)$	Hermit'sches Polynom n-ten Grades
I	Imaginärteil von $H(j\omega_m)$
k	diskreter Zeitpunkt
$K_0(x)$	modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung
l	Unterabtastrate
m	Schieberegisterlänge
M_n	relatives Moment n-ter Ordnung
$n_\cdot$	Grad, Anzahl ($\cdot$ Index)

$n(t)$	Störsignal (unkorreliert zu $u(t)$)
N	Periode der PN-Folge
$N_\cdot$	Leistung des Störanteils des Signals $\cdot(t)$
$p_\cdot(x)$	Verteilungsdichte des Signals $\cdot(t)$
$p_{\cdot,\nu}$	Wahrscheinlichkeit
$P_\cdot(x)$	Verteilungsfunktion des Signals $\cdot(t)$
q	Stufenhöhe bei Deltamodulation
Q	Quantisierungseinheit
r	Interpolationsrate
$r(t)$, $r_1(t),\ldots, r_8(t)$	Rauschsignale
R	Realteil von $H(j\omega_m)$
S	statistische Sicherheit
$S_\cdot$	Leistung des Signalanteils des Signals $\cdot(t)$
t, t_Δ	Zeit, Verzögerungszeit
T	Meßdauer
T_A, T_0	Abtastzeit, Taktzeit
$u(t)$	Eingangssignal des Meßobjekts
$u_1(t)$	Eingangssignal des Meßobjekts mit Bandlücke
$v(t)$	Signal innerhalb des Meßobjekts
$v_{ä}$	äquivalente Verstärkung
w	Wortlänge
$x(t)$, $x(k)$	Bandpaßausgangssignal
$y(t)$, $y(k)$	Ausgangssignal des Meßobjekts
$y_L(t)$, $y_L(k)$	vom Eingangssignal linear abhängiger Anteil des Ausgangssignals

z	komplexe Frequenz im Zeitdiskreten
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
α, β, γ	Koeffizienten
α_0, α_1	Koeffizienten bei TP-BP-Transformation
$\gamma_0(k), \gamma_{-1}(k)$	diskreter Einheitsimpuls, -sprung
$\delta_0(t), \delta_{-1}(t)$	Einheitsimpuls, -sprung
δ_D, δ_S	Toleranzband im Durchlaß- bzw. Sperrbereich
Δ	Differenz, Fehler
$\Delta\cdot(t)$	Differenzsignal zum Signal $\cdot(t)$
$\Delta\omega_\cdot, \Delta\Omega_\cdot$	Bandbreiten ($\cdot$ Index)
ε	relative Abweichung, Fehler
$\varkappa$	diskrete Verzögerungs- bzw. Zeitpunkte
$\mu_\cdot$	Mittelwert des Signals $\cdot(t)$
$\rho_{\cdot\cdot}(\tau)$	normierte AKF des Signals $\cdot(t)$
$\sigma_\cdot$	Streuung
τ	Verzögerungs- bzw. Laufzeit
$\varphi_\cdot$	Phasenwinkel ($\cdot$ Index)
$\varphi_{\cdot\cdot}(\tau), \varphi_{\cdot\cdot}(\varkappa)$	AKF des Signals $\cdot(t)$, $\cdot(k)$
$\Phi_{\cdot\cdot}(\omega)$	Leistungsdichtespektrum des Signals $\cdot(t)$
$\omega, \omega_A, \omega_m$	Kreisfrequenz, Abtast-, Mitten- bzw. Meßfrequenz
$\Omega, \Omega_\cdot$	Frequenz im Zeitdiskreten ($\cdot$ Index)

Operanden

$\hat{\cdot}$	Meß- oder Schätzwert der Größe $\cdot$
$\tilde{\cdot}$	Hilfsgröße
$\overline{\cdot}$	zeitlicher Mittelwert
$E\{\cdot\}$	Erwartungswert
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Fourieroperation
$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$	inverse Fourieroperation
$Var\{\cdot\}$	Varianz
$W\{\cdot\}$	Wahrscheinlichkeit

Abkürzungen

AKF	Autokorrelationsfunktion, -folge
BP	Bandpaß
ΔM, LDM, ADM	Deltamodulation, lineare, adaptive Deltamodulation
LDS	Leistungsdichtespektrum
PCM, DPCM	Pulscodemodulation, differentielle Pulscodemodulation
SNR	Signalrauschabstand
TP	Tiefpaß

EINLEITUNG UND ÜBERSICHT

Im Fernsprechverkehr geht die Entwicklung zu immer breiter eingesetzter Digitalisierung der übertragenen Sprache, da durch den Einsatz hochintegrierter Bausteine der Verbindungsaufbau und die Übertragung binärer Signale zunehmend günstiger wird. Um bei zunehmendem Einsatz digitaler Nachrichtenübertragungssysteme die vorhandenen Kanalkapazitäten möglichst gut ausnutzen zu können, werden solche Systeme entwickelt, die bei der geforderten Qualität der Übertragung mit einer möglichst geringen Bitrate auskommen. Aufgrund der daraus resultierenden Komplexität weisen moderne Übertragungssysteme Übertragungseigenschaften auf, die im starken Maße von den Eigenschaften des zu übertragenden Signals abhängen.

Um die linearen und nichtlinearen Verzerrungen derartiger schwach nichtlinearer Systeme erfassen zu können, wird eine Meßmethode benötigt, bei der Signale verwendet werden, die als Modell für die im realen Betrieb auftretenden Signale aufgefaßt werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird nach der Diskussion einiger Meßmethoden, die nichtlineare Verzerrungen erfassen (Kapitel 1), die Verallgemeinerung des Rauschklirrmeßverfahren vorgestellt, wodurch es ermöglicht wird, nichtlineare wie lineare Verzerrungen bei nahezu beliebigem Signal zu ermitteln (Kapitel 2). Es werden Beziehungen für die zu erwartende Meßgenauigkeit abgeleitet und Dimensionierungsvorschriften für einen realisierten flexiblen Meßplatz angegeben.

UNIV. LEIDEN BIBL.

Im Kapitel 3 wird der Einsatz verschiedener Meßsignale diskutiert. Dabei wird die Realisierungsmöglichkeit eines Modellsignalgenerators vorgestellt, bei dem es möglich ist, die Amplitudenverteilungsdichte und die Autokorrelationsfunktion des Modellsignals in gewissen Grenzen frei zu wählen. Die Realisierung des Generators für den Rauschklirrmeßplatz ist anschließend angegeben.

Die durchgeführten Messungen, die zum einen zur Überprüfung der errechneten Genauigkeit dienten und zum anderen Ergebnisse für die bekannten digitalen Sprachübertragungssysteme Pulscodemodulation und Deltamodulation ergaben, sind im Kapitel 4 vorgestellt und diskutiert.

1. FEHLERDEFINITIONEN

Zur praktischen Untersuchung schwach nichtlinearer Systeme ist als erstes ein geeignetes Meßverfahren zu finden, um eine zahlenmäßige Angabe für die Abweichung vom linearen Verhalten machen zu können. Zu diesem Zweck werden zunächst die in diesem Zusammenhang häufig verwendeten Fehlerdefinitionen auf ihre Eignung für allgemeine schwach nichtlineare Systeme untersucht.

Als Vergleichsbasis soll das zeitinvariante Systemmodell nach Bild 1.1 dienen, bei dem wir die Systemreaktion in der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= y_L(t) + n(t) \\ &= u(t) * h_o(t) + f_n(u(t)) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

schreiben. Hier beschreibt $h_o(t)$ den linearen Systemteil, während in $n(t) = f_n(u(t))$ die Teile der Reaktion erfaßt sind, die nichtlinear von $u(t)$ abhängen.

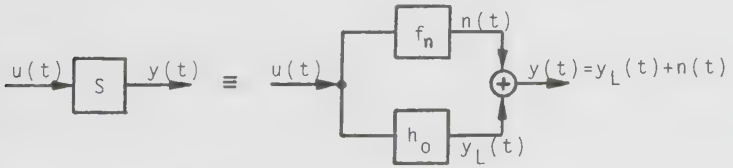


Bild 1.1 : Modell für nichtlineares System

Ziel der praktisch verwendeten Meßverfahren ist es, eine Auftrennung der linearen und nichtlinearen Anteile in der Systemreaktion gemäß Gleichung (1.1) zu erreichen Dies ist i. a. nur mit Einschränkungen möglich, die im folgenden beschrieben sind. Dabei wird angenommen, daß das untersuchte System zeitinvariant ist.

1.1. Ideales lineares Ersatzsystem

Im Falle eines idealen linearen Teilsystems ist $y_L(t) = u(t)$, d.h. $h_0(t) = \delta_0(t)$. Offenbar erhält man (siehe Bild 1.2)

$$e_1(t) = y(t) - u(t) \tag{1.2}$$

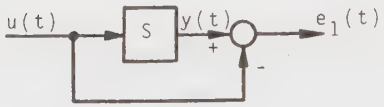


Bild 1.2 : Ideales lineares Ersatzsystem

Der entscheidende Vorteil dieser Fehlerdefinition liegt in der Anwendbarkeit für beliebige Eingangssignale. Zu beachten ist jedoch, daß die Annahme eines idealen linearen Teilsystems den realen Verhältnissen kaum gerecht werden kann. Bereits eine - für eine verzerrungsfreie Übertragung zugelassene - Verzögerung und Multiplikation mit einem konstanten Faktor führt dazu, daß $e_1(t)$ von $u(t)$ linear abhängige Anteile enthält. Damit ist dieses Verfahren aufgrund der Einfachheit in der Regel sehr schlecht geeignet, das Störsignal $n(t)$ zu bestimmen. Trotzdem wird diese Definition z. B. bei der Untersuchung von Deltamodulationssystemen häufig verwendet. (z. B. /1/).

Der Realisierungsaufwand zur Gewinnung der Fehlergröße besteht nur aus einer Differenzbildung und ist damit praktisch vernachlässigbar, was wohl der wesentliche Grund seiner häufigen Anwendung ist.

1.2. Äquivalente Verstärkung

Erweitert man die obige Fehlerdefinition derart, daß das Eingangssignal mit einem Faktor gewichtet vom Ausgangssignal subtrahiert wird, also

$$e_2(t) = y(t) - v_{ä} \cdot u(t) \qquad (1.3)$$

so kann der linear abhängige Anteil im Fehlersignal reduziert werden. (vergl. Bild 1.3)

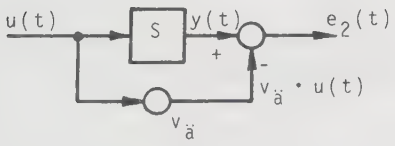


Bild 1.3 : Modellierung mit äquivalenter Verstärkung

Dabei wird der Faktor als äquivalente Verstärkung $v_{ä}$ bezeichnet und derart bestimmt, daß die Leistung von $e_2(t)$ minimal wird.

Für die Anwendbarkeit dieses Fehlermaßes gelten, abgesehen von einer - im allgemeinen geringen - Reduktion des korrelierten Anteils im Fehlersignal, die gleichen Aussagen wie im Kapitel 1.1.

Für den Sonderfall, daß das System durch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Momentanwerten von Eingangs- und Ausgangssignal vollständig beschrieben ist, also

$$y(t) = f(u(t)) \qquad (1.4)$$

wird der linear abhängige Anteil im Fehlersignal zu null. Für derartige Systeme wird diese Fehlerdefinition auch praktisch ausschließlich angewandt.

Bei Kenntnis der Kennlinie f(u) und der Amplitudenverteilungsdichte $p_u(v)$ des beliebigen aber ergodischen Eingangssignals u(t) läßt sich dann für diesen Sonderfall die Größe $v_{\ddot{a}}$ direkt berechnen /2/ :

$$v_{\ddot{a}} = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot f(v) \cdot p_u(v) dv \qquad (1.5)$$

mit σ_u^2 = Varianz des Eingangssignals u(t)

Speziell bei einem gaußverteilten mittelwertfreien Eingangssignal läßt sich diese Beziehung durch partielle Integration vereinfachen zu

$$v_{\ddot{a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(v)}{dv} \cdot p_u(v) dv \qquad (1.6)$$

$$\text{mit } p_u(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(\frac{-v^2}{2\sigma_u^2}\right)$$

Der Realisierungsaufwand zur Ermittlung der Fehlergröße liegt im wesentlichen in der Bestimmung der äquivalenten Verstärkung $v_{\ddot{a}}$. In der Praxis ist die Kennlinie f(u) unbekannt. Dann ist ein Abgleich der Größe $v_{\ddot{a}}$ so vorzunehmen, daß die gemessene Fehlerleistung $e_2^2(t)$ minimal wird.

1.3 Systemmodellierung

Bei den beiden oben genannten Fehlermaßen liegt der entscheidende Nachteil darin, daß sie für Systeme mit linear verzerrenden Anteilen praktisch völlig unbrauchbar sind. Man kann diese Fehlermaße als eine Modellierung des linearen Systemanteils (vergl. Bild 1.1) mit einer Konstanten, die eins bzw. $v_{\ddot{a}}$ beträgt, auffassen. Im allgemeinen, durch Bild 1.4 gekennzeichneten Fall hat man die Parameter des linearen Modellsystems so zu bestimmen, daß die Leistung von

$$e_3(t) = y(t) - h_{oM}(t) * u(t) \qquad (1.7)$$

minimal wird.

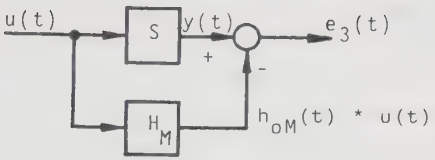


Bild 1.4 : lineares Systemmodell

Die Anwendbarkeit dieses Fehlermaßes erweitert sich somit auf Systeme mit linear verzerrenden Anteilen. /3/

Der Fehler $e_3(t)$ läßt sich bis auf den nichtkorrelierten Anteil n(t) reduzieren, falls es möglich ist, das Modellsystem H_M exakt zu bestimmen.

Bei einer praktischen Realisierung liegt der Aufwand in der Optimierung der (endlich vielen) Parameter des Modellsystems, wobei wieder die Leistung $\overline{e_3^2(t)}$ des Fehlersignals zu minimieren ist.

Trotz des wesentlich erhöhten Aufwandes ist das Fehlersignal $e_3(t)$ nicht völlig vom Eingangssignal u(t) dekorreliert.

1.4. Klirrfaktormessung

Während die bisher betrachteten Fehlerdefinitionen für beliebige Eingangssignale anwendbar sind und dabei korrelierter und unkorrelierter Fehleranteil im allgemeinen nicht völlig trennbar sind, bietet die Klirrfaktormessung eine völlige Trennung von Nutz- und Störanteil, jedoch mit der Einschränkung auf ein monofrequentes Eingangssignal. (Bild 1.5)

Das Fehlersignal ist definiert als

$$e_4(t) = y(t) - a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$\text{wobei } u(t) = a_0 \cdot \sin\omega t \qquad (1.8)$$

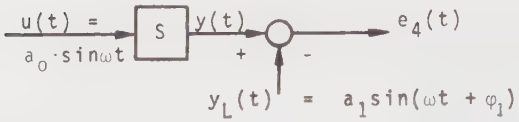


Bild 1.5 : Klirrfaktormessung

Die übliche Definition des Klirrfaktors geht von der Annahme aus, daß sich die Systemreaktion darstellen läßt als

$$y(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu\omega t + \varphi_\nu) \qquad (1.9)$$

Dann ist der Klirrfaktor

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^2}{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2}} \qquad (1.10)$$

Bei der erweiterten Definition des Klirrfaktors wird die Systemreaktion entsprechend Gleichung (1.8) zerlegt, wobei a_1 und φ_1 so gewählt werden, daß

$$\overline{e_4(t) \cdot u(t)} = 0 \qquad (1.11)$$

gilt. Der Klirrfaktor berechnet sich dann zu

$$k = \sqrt{\frac{\overline{e_4^2(t)}}{\overline{y^2(t)}}} \qquad (1.12)$$

Die sinnvolle Anwendung dieses Meßverfahrens bleibt auf Systeme beschränkt, deren Verhalten nicht von der Signalform und der spektralen Zusammensetzung des Eingangssignals abhängen.

1.5. Rauschklirrmeßverfahren

Das jetzt zu beschreibende Rauschklirrmeßverfahren ist insofern eine Erweiterung oder Verallgemeinerung der Klirrfaktormessung, als es ebenfalls in einfacher Weise eine Abtrennung der durch die Nichtlinearität entstehenden störenden Spektralanteile gestattet. Dazu wird ein Testsignal verwendet, das die Bandbreite des zu untersuchenden Systems nicht voll ausnutzt /4/.
Dabei hat das Testsignal jeweils auf das Meßobjekt zugeschnittene Eigenschaften. Zum Beispiel wird bei der Untersuchung von Trägerfrequenzsystemen ein weißes gaußsches Geräusch verwendet, das eine Bandlücke der Breite eines Einzelkanals hat. Bei PCM-Systemen verwendet man ein Bandpaßgeräusch im Bereich von 350 Hz bis 550 Hz. In dem vom Testsignal nicht belegten Frequenzbereich wird mittels eines Bandpasses das zum Testsignal unkorrelierte Störsignal herausgefiltert und dessen Leistung bestimmt.

Setzt man voraus, daß erstens das untersuchte System auf ein in der Praxis anliegendes Nutzsignal mit gleicher Störleistung reagiert wie auf das Testsignal und zweitens die spektrale Verteilung des Störsignals bekannt ist, läßt sich so die Gesamtleistung des (zum Eingangssignal unkorrelierten) Störsignals ermitteln.

Deshalb wird dieses Meßverfahren meist nur bei Meßobjekten angewandt, deren signalabhängiges Verhalten nicht zu stark ausgeprägt ist.

Der Realisierungsaufwand besteht in der Erzeugung eines geeigneten Testsignals, einer Bandpaßfilterung und der Leistungsbestimmung des bandpaßgefilterten Signals. Er ist damit nicht sehr hoch, jedoch ist eine Meßanordnung im allgemeinen auf ein bestimmtes Meßobjekt spezialisiert.

2. VERALLGEMEINERTES RAUSCHKLIRRMESSVERFAHREN

Das Ziel ist es, für die Untersuchung allgemeiner schwach nichtlinearer Systeme ein Meßverfahren zu besitzen, das bei beliebigem Eingangssignal u(t) die Systemreaktion y(t) in ihren linear abhängigen Anteil $y_L(t)$ und unabhängigen Störanteil n(t) aufzuspalten vermag. (Vergleiche Bild 1.1)
Bei Vergleich der in Kapitel 1 beschriebenen Meßverfahren gelingt dies am ehesten mit der frequenzselektiven Rauschklirrmeßtechnik. Darüber hinaus erscheint es wünschenswert, daß das Meßverfahren auch eine Aussage über die linearen Eigenschaften des Systems liefert, das heißt den komplexen Frequenzgang zu messen gestattet.

Zu diesem Zweck wird im folgenden ein Rauschklirrmeßverfahren entwickelt, das allgemein anwendbar wird. Dabei wird von einem speziellen Testsignal abgegangen und die Verwendung eines beliebigen, die Bandbreite des zu untersuchenden Systems voll ausnutzenden Signals ermöglicht. Weiterhin gelingt die Erweiterung derart, daß auch eine Messung der linearen Verzerrungen erfolgen kann.

2.1. Prinzip des Meßverfahrens

Das verallgemeinerte Rauschklirrmeßverfahren erlaubt es, die spektrale Leistungsdichte $\Phi_{nn}(\omega)$ des zum Eingangssignal u(t) unkorrelierten Störsignals n(t) zu messen. Dabei ist unter Leistungsdichte eines Signals folgender Zusammenhang zu verstehen :

$$\Phi_{nn}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{nn}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}\{\varphi_{nn}(\tau)\} \qquad (2.1)$$

Hier berechnet sich die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{nn}(\tau)$ bei einem ergodischem Signal n(t) mit

$$\varphi_{nn}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t) \cdot n(t+\tau)\, dt \qquad (2.2)$$

Zudem wird die komplexe Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des Systems ermittelt, wobei folgender Ausdruck gemeint ist :

$$H(j\omega) = \int_0^\infty h_o(t)\, e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{h_o(t)\} \qquad (2.3)$$

Dabei sei die kausale Impulsantwort $h_o(t)$ definiert durch die Beziehung

$$y_L(t) = u(t) * h_o(t) \quad , \qquad (2.4)$$

wobei

$$y_L(t) = y(t) - n(t) \qquad (2.5)$$

gilt.

Das Prinzip des Meßverfahrens sei im folgenden erläutert.

Zur Messung der Störleistungsdichte wird in das Leistungsdichte-Spektrum $\Phi_{uu}(\omega)$ des (beliebigen) Eingangssignals u(t),

$$\Phi_{uu}(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_{uu}(\tau)\} \quad , \qquad (2.6)$$

mit einer Bandsperre bei der Frequenz ω_m eine schmale Bandlücke der Breite $\Delta\omega$ geschnitten. (Bild 2.1)

Es wird hier vorausgesetzt, daß diese Filterung das Meßsignal nicht wesentlich ändert, daß also das zu untersuchende System bei Erregung mit $u_1(t)$ näherungsweise das gleiche Fehlersignal n(t) ergibt wie bei Erregung mit u(t). Dazu wird man anstreben müssen, daß u(t) und $u_1(t)$ in etwa die gleichen statistischen Eigenschaften besitzen. Eine genauere Untersuchung erfolgt im Abschnitt 2.2.

Durchläuft dieses Signal $u_1(t)$ das Meßobjekt, entstehen Störanteile n(t), die den gesamten Frequenzbereich bedecken und sich damit auch in der Bandlücke befinden. Aus dem Leistungsdichtespektrum $\Phi_{yy}(\omega)$ des Ausgangssignals y(t) wird mit einem Bandpaß der Breite $\Delta\omega$ der Störsignalanteil $x_n(t)$ in der Bandlücke bei ω_m herausgefiltert und dessen Leistung bestimmt.
Mit diesem Leistungswert wird dann ein Schätzwert für die Leistungsdichte $\Phi_{nn}(\omega_m)$ berechnet.

Durchläuft die Mittenfrequenz ω_m das gesamte Nutzband in genügend kleinen Schritten, erhält man so einen Schätzwert $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ des Leistungsdichtesprektrums $\Phi_{nn}(\omega)$ des zum Eingangssignal unkorrelierten Störsignals n(t).

Bei Wiederholung dieses Meßvorgangs bei überbrückter Bandsperre gewinnt man anschließend einen Schätzwert $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ für das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{yy}(\omega)$ des Ausgangssignals y(t).

Zur Messung der komplexen Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ wird das Meßverfahren erweitert, indem nach der Bandsperre ein sinusförmiges Signal geringer Amplitude a_1 und der Frequenz ω_m eingespeist wird. (Bild 2.2) Nach dem Bandpaß liegt dann außer dem rauschförmigen Anteil $x_n(t)$ des Störsignals ein sinusförmiges Signal an, aus dessen Amplitude a_2 und Phasenlage φ bei Berücksichtigung der linearen Verzerrungen des Bandpasses die komplexe Übertragungsfunktion $H(j\omega_m)$ des Meßobjekts berechnet werden kann. Durchläuft nun die Mittenfrequenz ω_m den genutzten Frequenzbereich, so erhält man einen Schätzwert $\hat{H}(j\omega)$ für die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$.

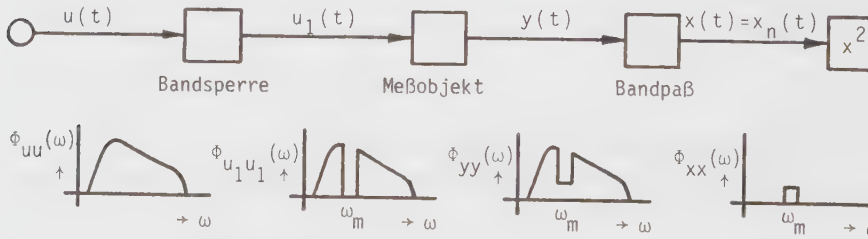


Bild 2.1.: Messung der Störleistungsdichte

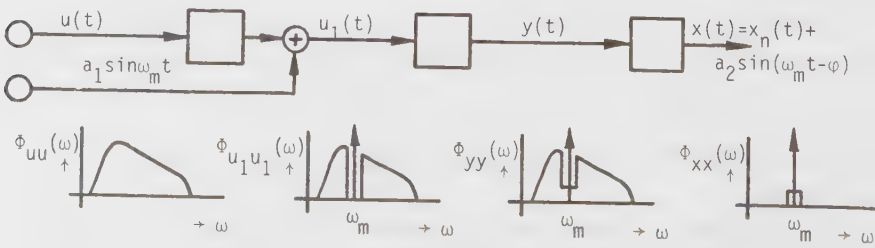


Bild 2.2.: Messung der linearen Übertragungsfunktion

2.2. Genauigkeit des Meßverfahrens

Wie bei jeder Messung muß auch hier eine Angabe darüber erfolgen, wie genau die Schätzwerte für Störleistungsdichte $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ und komplexer Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ sind. Im folgenden sollen also die systematischen und statistischen Meßfehler ermittelt werden. Sie sind im wesentlichen von zwei Faktoren bestimmt, nämlich von der Linearität des Meßobjekts selbst und von der Dimensionierung des Meßaufbaus.

2.2.1. Meßobjektabhängige Genauigkeit

Die Systemeigenschaften sollen für ein bestimmtes Nutzsignal u(t) bestimmt werden. Die Messung erfolgt aber mit dem mit der Bandsperre gefilterten und eventuell mit einem additiven Sinussignal versehenen Signal $u_1(t)$, das sich deshalb in seinen statistischen Eingenschaften vom Nutzsignal u(t) unterscheidet. Dadurch können die gemessenen Systemeigenschaften von den eigentlich zu bestimmenden abweichen, das heißt es existiert ein systematischer Fehler. Eine quantitative Aussage über die Größe des Fehlers läßt sich höchstens im Einzelfall durch weitergehende Untersuchung des Meßobjekts erzielen, oder dann, wenn Modellsysteme so einfach beschrieben werden können, daß die meßtechnisch nach dem beschriebenen Verfahren zu bestimmenden Größen auch theoretisch ermittelt werden können.

Qualitativ läßt sich sicher aussagen, daß mit geringer werdenden Abweichungen der statistischen Eigenschaften zwischen Nutzsignal u(t) und eigentlichem Meßsignal $u_1(t)$ der Fehler auch geringer wird. Dies bedeutet speziell, das die Bandbreite der Bandsperre und die Amplitude a_1 des additiven Sinussignals so gering wie meßtechnisch vertretbar gehalten werden müssen. Die in diesem Zusammenhang durchzuführenden Untersuchungen s c h w a c h nichtlinearer Systeme begrenzen die Größe dieses systematischen Fehlers, da mit der Stärke des nichtlinearen Verhaltens des Systems auch der Fehler abnimmt.

2.2.2. Genauigkeit der Leistungsdichtemessung

Der Schätzwert $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ für die spektrale Leistungsdichte bei der Frequenz ω_m wird durch Leistungsmessung des Bandpaßsignals $x_n(t)$ bestimmt, indem dieser Leistungsschätzwert $\hat{\sigma}_x^2(t_o)$ auf die Bandbreite $\Delta\omega$ des Bandpasses bezogen wird. Es gilt also zum Zeitpunkt t_o

$$\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m) = \frac{\pi \cdot \hat{\sigma}_x^2(t_o)}{\Delta\omega} \tag{2.7}$$

$$\text{mit } \hat{\sigma}_x^2(t_o) = \frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1 \tag{2.8}$$

$$\text{und } 2\cdot\Delta\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{BP}(j\omega)|^2 d\omega \tag{2.9}$$

Da der Bandpaß bekannt ist, läßt sich die Bandbreite $\Delta\omega$ exakt berechnen, wobei angenommen wird, daß max $|H_{BP}(j\omega)| = 1$ gilt. Eine bei der Realisierung nötige Verstärkung zur optimalen Aussteuerung des Filters kann bei der Auswertung einfach berücksichtigt werden. Dagegen ist der Schätzwert $\hat{\sigma}_x^2(t_o)$ eine statistische Variable, da auch $x_n(t)$ eine statistische Größe ist. Der Schätzwert $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ ist deshalb ein statistischer Parameter, dessen Mittelwert gleich dem zu messenden Wert sein soll und dessen Varianz mit wachsendem Meßaufwand - hier der Meßdauer T - verschwinden muß. Diese beiden Forderungen, nämlich Erwartungstreue und Konsistenz /2/ sind zu überprüfen. Schlitt gibt in /5/ die Überprüfung für den hier definierten Schätzwert an, der Vollständigkeit halber wird sie kurz dargestellt.

Die Erwartungstreue wird durch Erwartungswertbildung des Schätzwerts geprüft und ergibt bei mittelwertfreiem Signal $x_n(t)$

$$E\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} = E\left\{\frac{\pi\hat{\sigma}_x^2}{\Delta\omega}\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{\pi}{\Delta\omega T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1\right\} =$$

$$E\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} = \frac{\pi}{\Delta\omega T}\int_{t_o-T}^{t_o} E\{x_n^2(t_1)\}dt_1 = \frac{\pi\sigma_x^2}{\Delta\omega} \qquad (2.10)$$

Die Varianz σ_x^2 des Signals $x_n(t)$ läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{nn}(\omega)\cdot|H_{BP}(j\omega)|^2\,d\omega \qquad (2.11)$$

Mit der Gleichung (2.9) ergibt sich dann aus (2.10)

$$E\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{nn}(\omega)\cdot|H_{BP}(j\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}|H_{BP}(j\omega)|^2\,d\omega}$$

$$= (1+\varepsilon(\omega_m))\cdot\Phi_{nn}(\omega_m) \qquad (2.12)$$

wobei gilt

$$\varepsilon(\omega_m) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{nn}(\omega)\cdot|H_{BP}(j\omega)|^2 d\omega}{\Phi_{nn}(\omega_m)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|H_{BP}(j\omega)|^2\,d\omega} - 1 \qquad (2.13)$$

$$\neq 0, \text{ wenn } \Phi_{nn}(\omega)\neq\Phi_{nn}(\omega_m) = \text{Konst}$$

Dies bedeutet, daß der Schätzwert nicht erwartungstreu ist, er besitzt eine Verschiebung $\varepsilon(\omega_m)\cdot\Phi_{nn}(\omega_m)$.

Um die Größe des systematischen Fehlers $\varepsilon(\omega_m)$ abschätzen zu können, wird $H_{BP}(j\omega)$ als zu einem idealen Rechteckbandpaß gehörig angenommen und $\Phi_{nn}(\omega)$ in der Umgebung von $\omega=\omega_m$ in eine Taylor-Reihe entwickelt, deren ersten vier Glieder verwendet werden.

$$\varepsilon(\omega_m) \approx \frac{\int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{(\omega-\omega_m)^\nu}{\nu!} \cdot \Phi_{nn}^{(\nu)}(\omega_m) \cdot d(\omega-\omega_m)}{\Phi_{nn}(\omega_m) \cdot \Delta\omega} - 1$$

$$= \frac{\Delta\omega^2 \cdot \Phi_{nn}''(\omega_m)}{24 \cdot \Phi_{nn}(\omega_m)} \qquad (2.14)$$

Man erkennt, daß der Schätzwert um so besser ist, je "glatter" das Leistungsdichtespektrum ist und je kleiner die Bandbreite $\Delta\omega$ ist.

Die Oberprüfung der Konsistenz liefert nebenbei eine Abschätzung der Genauigkeit des Schätzwerts bei bestimmter Meßdauer T. Zu bilden ist die Varianz des Schätzwerts.

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} = \frac{\pi^2}{\Delta\omega^2} \cdot \mathrm{Var}\{\frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1\}$$

$$= \frac{\pi^2}{\Delta\omega^2}[E\{(\frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1)^2\} - \sigma_x^4] \qquad (2.15)$$

Durch Schreiben des Quadrats des Integrals als Doppelintegral und Lösen eines Teilintegrals durch Substitution erhält man (siehe Anhang A 1)

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} =$$

$$= \frac{\pi^2}{\Delta\omega^2}[\frac{2}{T}\int_0^T (1 - \frac{\tau}{T})E\{x_n^2(t_o) \cdot x_n^2(t_o+\tau)\}\, d\tau - \sigma_x^4] \qquad (2.16)$$

Der Erwartungswert im Integranden läßt sich bei gaußverteiltem Signal $x_n(t)$ durch die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{xx}(\tau)$ ausdrükken /5/. Die Annahme, $x_n(t)$ sei ein gaußsches Geräusch, ist bei stationärem Nutzsignal $u(t)$ in sehr guter Näherung erfüllt, da der Bandpaß nur einen sehr geringen Anteil des Ausgangssignals $y(t)$ durchläßt.

Mit der Beziehung für ein mittelwertfreies Signal x(t)

$$E\{x_n^2(t) \cdot x_n^2(t+\tau)\} = 2 \cdot \varphi_{xx}^2(\tau) + \sigma_x^4 \qquad (2.17)$$

ergibt sich dann

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} = \frac{4\pi^2}{\Delta\omega^2 T} \int_0^T (1-\frac{\tau}{T}) \varphi_{xx}^2(\tau)\, d\tau \qquad (2.18)$$

Da die beiden Faktoren des Integranden für alle τ des Integrationsbereiches positiv sind, gilt folgende Abschätzung :

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} < \frac{2\pi^2}{\Delta\omega^2 T} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}^2(\tau) d\tau \qquad (2.19)$$

Da weiterhin das Integral einen endlichen Wert besitzt, verschwindet die Varianz des Schätzwerts für wachsende Meßzeiten T. Der Schätzwert ist also konsistent.

Mit der Parsevalschen Gleichung erhält man

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} < \frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}^2(\omega) d\omega =$$

$$\frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}^2(\omega) \cdot |H_{BP}(j\omega)|^4 \, d\omega \qquad (2.20)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2.9) läßt sich die relative Varianz des Schätzwerts bestimmen zu

$$\frac{\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\}}{\Phi_{nn}^2(\omega_m)} < \frac{2}{T} \cdot T_\Phi(\omega_m) \qquad (2.21)$$

wobei die Größe T_Φ definiert wird als

$$T_\Phi(\omega_m) = \frac{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}^{\ 2}(\omega) \left|H_{BP}(j\omega)\right|^4 \, d\omega}{\Phi_{nn}^{\ 2}(\omega_m) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{BP}(j\omega)\right|^2 \, d\omega\right)^2} \qquad (2.22)$$

Die Größe T_Φ hängt von dem Leistungsdichtespektrum ab sowie von der Übertragungsfunktion des Bandpasses. Zur Abschätzung des Werts von T_Φ setzt man das Leistungsdichtespektrum im Durchlaßbereich des Bandpasses als konstant an, wodurch der Faktor T_Φ nur noch von der Übertragungsfunktion des Bandpasses bestimmt wird :

$$T_\Phi \approx \frac{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{BP}(j\omega)\right|^4 \, d\omega}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{BP}(j\omega)\right|^2 \, d\omega\right)^2} \qquad (2.23)$$

Dieser Ausdruck läßt sich aus den bekannten Daten des Bandpasses exakt berechnen.

Zur weiteren Vereinfachung setzt man Gleichung (2.9) in Gleichung(2.23) ein :

$$T_\Phi \approx \frac{\pi}{\Delta\omega} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{BP}(j\omega)\right|^4 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{BP}(j\omega)\right|^2 \, d\omega} \qquad (2.24)$$

Mit der eingangs gemachten Voraussetzung $\max\left|H_{BP}(j\omega)\right| = 1$ erkennt man, daß der Quotient der Integrale in Gleichung (2.24) kleiner oder gleich eins ist.

Damit berechnet sich die (statistische) Genauigkeit des Schätzwerts $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ letztlich zu

$$\frac{\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\}}{\Phi_{nn}^2(\omega_m)} = \left[\frac{\sigma_{\hat{\Phi}nn}(\omega_m)}{\Phi_{nn}(\omega_m)}\right]^2 < \frac{2T_\Phi}{T} \approx \frac{2\pi}{T\cdot\Delta\omega} \qquad (2.25)$$

Ist die Verteilung des Schätzwertes $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ bekannt, läßt sich die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der der wahre Wert $\Phi_{nn}(\omega_m)$ innerhalb von dem durch den maximalen Meßfehler ε_Φ vorgegebenen Schranken $\pm\varepsilon_\Phi \cdot \Phi_{nn}(\omega_m)$ um den Meßwert $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ liegt. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit statistischer Sicherheit S bezeichnet /5/ und bestimmt mit

$$S = W\{\hat{\Phi}_{nn} - \varepsilon_\Phi \cdot \Phi_{nn} < \Phi_{nn} < \hat{\Phi}_{nn} + \varepsilon_\Phi \cdot \Phi_{nn}\} \qquad (2.26)$$

Durch Umformung erhält man

$$S = W\{(1-\varepsilon_\Phi)\Phi_{nn} < \hat{\Phi}_{nn} < (1+\varepsilon_\Phi)\Phi_{nn}\}$$
$$= \int_{(1-\varepsilon_\Phi)\Phi_{nn}}^{(1+\varepsilon_\Phi)\Phi_{nn}} p_{\hat{\Phi}}(x)\,dx \qquad (2.27)$$

Bild 2.3 zeigt qualitativ die Verteilung des Schätzwertes $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$. Der Einfachheit halber sei im folgenden für $\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)$ kurz $\hat{\Phi}$ geschrieben.

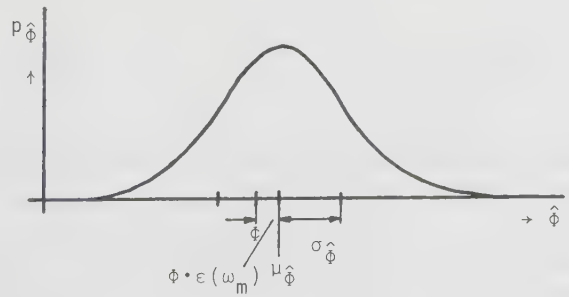


Bild 2.3.: Qualitativer Verlauf der Verteilung des Schätzwertes der Störleistungsdichte

Bei großen Meßzeiten, das heißt kleinen relativen Fehlern, ist der Schätzwert $\hat{\Phi}$ annähernd gaußverteilt. Mit den in Gleichung (2.12) berechneten Mittelwert $\mu_{\hat{\Phi}} = E\{\hat{\Phi}\} = (1+\varepsilon(\omega_m))\cdot\Phi_{nn}$ erhält man

$$S \approx \int_{(1-\varepsilon_\Phi)\Phi}^{(1+\varepsilon_\Phi)\Phi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{\Phi}}} \exp\left(\frac{-(x-\mu_{\hat{\Phi}})^2}{2\sigma_{\hat{\Phi}}^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_\Phi - \varepsilon}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Phi}{\sigma_{\hat{\Phi}}}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_\Phi + \varepsilon}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Phi}{\sigma_{\hat{\Phi}}}\right)$$

$$> \mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_\Phi - |\varepsilon|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Phi}{\sigma_{\hat{\Phi}}}\right) \qquad (2.27)$$

Definiert man die Größe $v(S)$ derart, daß

$$S = \mathrm{erf}\left(\frac{v(S)}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.28)$$

gilt, und setzt Gleichung (2.25) in Gleichung (2.27) ein, so folgt aufgrund des streng monotonen Verhaltens der Fehlerfunktion

$$v(S) \gtrapprox (\varepsilon_\Phi - |\varepsilon(\omega_m)|) \cdot \frac{\Phi}{\sigma_{\hat{\Phi}}}$$

$$> (\varepsilon_\Phi - |\varepsilon(\omega_m)|) \cdot \sqrt{\frac{T}{2T_\Phi}} \qquad (2.29)$$

Der Zusammenhang zwischen S und v(S) ist z. B. in /6/ tabelliert. Einen Auszug daraus gibt Tabelle 2.1 wieder.

S	v(S)
68,0 %	1,0
90,0 %	1,65
95,0 %	1,96
99,0 %	2,58
99,7 %	3,0

Tabelle 2.1

Bei Vorgabe eines maximalen Meßfehlers ε_Φ, der mit der statistischen Sicherheit S nicht überschritten wird, läßt sich mit Gleichung (2.25) und Gleichung (2.29) die minimal nötige Meßzeit berechnen. Diese Schranke T_u ergibt sich somit zu

$$T_u \leq 2 \cdot T_\Phi \left(\frac{v(S)}{\varepsilon_\Phi - |\varepsilon(\omega_m)|} \right)^2 \qquad (2.30\ a)$$

$$\leq \frac{2\pi}{\Delta\omega} \left(\frac{v(S)}{\varepsilon_\Phi - |\varepsilon(\omega_m)|} \right)^2$$

Die für eine vorgegebene Genauigkeit erforderliche Meßzeit muß dann mindestens

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \left(\frac{v(S)}{\varepsilon_\Phi - |\varepsilon(\omega_m)|} \right)^2 \qquad (2.30\ b)$$

betragen, um auf der sicheren Seite der Abschätzung zu liegen.

2.2.3. Genauigkeit der Messung der komplexen Übertragungsfunktion

Die Abschätzung der Genauigkeit der Messung der Übertragungsfunktion und das Ergebnis hängen vom verwendeten Meßverfahren ab, so daß hier keine allgemeingültigen Beziehungen angegeben werden können. Deshalb wird im folgenden die Genauigkeitsuntersuchung für das im realisierten Meßaufbau verwendete Verfahren durchgeführt. Dabei wird zur Bestimmung der komplexen Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ zum Zeitpunkt t_o bei jeder Meßfrequenz ω_m aus dem verrauschten sinusförmigen Ausgangssignal $x(t)$ des Systems die Werte $x(t_o)$ und $x(t_o - t_\Delta)$ entnommen und je ein Wert $R(t_o)$ für den Realteil bzw. $I(t_o)$ für den Imaginärteil der Übertragungsfunktion berechnet /7/.

Für die Frequenz ω_m ergeben sich folgende Ausdrücke :

$$R(t_o) =$$

$$= \frac{+1}{a_1 \sin\omega_m t_\Delta} \left(\cos\omega_m(t_o - t_\Delta) \cdot x(t_o) - \cos\omega_m t_o \cdot x(t_o - t_\Delta)\right)$$

$$I(t_o) =$$

$$= \frac{-1}{a_1 \sin\omega_m t_\Delta} \left(\sin\omega_m(t_o - t_\Delta) \cdot x(t_o) - \sin\omega_m t_o \cdot x(t_o - t_\Delta)\right)$$

(2.31 a, b)

Die erregende Zeitfunktion (nach der Bandsperre) lautet dabei $a_1 \cdot \sin\omega_m t$.

Da das Signal x(t) einen rauschförmigen Anteil $x_n(t)$ besitzt, sind auch die ermittelten Größen $R(t_o)$ und $I(t_o)$ verrauscht und damit zeitabhängig. Eine lineare Mittelung liefert dann die Schätzwerte $\hat{R}$ und $\hat{I}$ für die wahren Werte R und I.

Setzt man das Ausgangssignal

$$x(t) = a_2 \cdot \sin(\omega_m t - \varphi) + x_n(t) \qquad (2.32)$$

in Gleichung (2.31) ein, so erhält man

$$R(t_o) = \frac{a_2}{a_1} \cos\varphi +$$

$$+ \frac{+1}{a_1 \sin\omega_m t_\Delta} \left(\cos\omega_m(t_o - t_\Delta) \cdot x_n(t) - \cos\omega_m t \cdot x_n(t_o - t_\Delta)\right)$$

$$= R + \Delta_R(t_o) \qquad (2.33 a)$$

$$I(t_o) = -\frac{a_2}{a_1}\sin\varphi +$$

$$+ \frac{-1}{a_1 \sin\omega_m t_\Delta}\left(\sin\omega_m(t_o - t_\Delta)\cdot x_n(t_o) - \sin\omega_m t_o \cdot x_n(t_o - t_\Delta)\right)$$

$$= I + \Delta_I(t_o) \qquad (2.33\ b)$$

Für die Schätzwerte $\hat{R}$ und $\hat{I}$ ergeben sich folgende Ausdrücke :

$$\hat{R} = R + \frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} \Delta_R(t_1)dt_1 \qquad (2.34\ a)$$

$$\hat{I} = I + \frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} \Delta_I(t_1)dt_1 \qquad (2.34\ b)$$

Mit $x_n(t)$ sind auch $\Delta_R(t_o)$ und $\Delta_I(t_o)$ mittelwertfreie Rauschsignale, woraus direkt folgt, daß die Schätzwerte $\hat{R}$ und $\hat{I}$ erwartungstreu sind.

Die Konsistenzprüfung und Genauigkeitsabschätzung sei beispielhaft am Realteil durchgeführt.

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} = E\{\left(\frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} \Delta_R(t_1)dt_1\right)^2\}$$

$$= E\{\left(\frac{-1}{Ta_1\sin\omega_m t_\Delta}\int_{t_o-T}^{t_o}\left(\cos\omega_m(t_1 - t_\Delta)\cdot x_n(t_1) - \cos\omega_m t_1 x_n(t_1 - t_\Delta)\right)dt_1\right)^2\} \qquad (2.35\ a)$$

Von dem sich ergebenden Doppelintegral läßt sich bei Annahme der Stationarität von $x_n(t)$ ein Teilintegral auflösen. Es verbleibt ein vom Zeitpunkt t_o abhängiger Ausdruck, der im Anhang A2 hergeleitet wird :

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} = \frac{1}{Ta_1^2 \sin^2\omega_m t_\Delta} \int_{-T}^{+T} (1-\frac{|\tau|}{T})\tilde{\varphi}_1(\tau) \quad +$$

$$+ \frac{\cos\omega_m(2t-T-t_\Delta)}{\omega_m T^2 a_1^2 \sin^2\omega_m t_\Delta} \int_{-T}^{+T} \sin\omega_m(T-|\tau|)\tilde{\varphi}_2(\tau)d\tau \qquad (2.36\,a)$$

mit

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \varphi_{xx}(\tau)\cdot\cos\omega_m\tau -$$

$$- \tfrac{1}{2}\varphi_{xx}(\tau + t_\Delta)\cdot\cos\omega_m(\tau - t_\Delta)$$

$$- \tfrac{1}{2}\varphi_{xx}(\tau - t_\Delta)\cdot\cos\omega_m(\tau + t_\Delta)$$

und

$$\tilde{\varphi}_2(\tau) = \varphi_{xx}(\tau)\cdot\cos\omega_m t_\Delta$$

$$- \tfrac{1}{2}\varphi_{xx}(\tau + t_\Delta) - \tfrac{1}{2}\varphi_{xx}(\tau - t_\Delta)$$

Für den Ausdruck $\mathrm{Var}\{\hat{I}\}$ ergibt sich die gleiche Beziehung, nur mit dem Unterschied,daß das zweite Integral in Gleichung (2.36) negatives Vorzeichen besitzt. Daraus folgt unmittelbar folgender Zusammenhang :

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} = \frac{2}{Ta_1^2 \sin^2\omega_m t_\Delta} \int_{-T}^{+T} (1-\frac{|\tau|}{T})\tilde{\varphi}_1(\tau)d\tau \qquad (2.37)$$

Da eine Varianz immer positiv ist, erhält man damit eine obere Schranke für $\mathrm{Var}\{\hat{R}\}$ bzw. $\mathrm{Var}\{\hat{I}\}$. Da das Integral in Gleichung (2.37) einen endlichen Wert besitzt, geht die Varianz für große Meßzeiten T gegen Null, die Schätzwerte $\hat{R}$ und $\hat{I}$ sind somit konsistent.

Unter der Voraussetzung, daß die Meßzeit T so groß ist, daß

$$\omega_m T \gg 1 \tag{2.38}$$

gilt, ist das zweite Integral in Gleichung (2.36) gegen das erste vernachlässigbar. Eine weitere Vereinfachung der Gleichung (2.36) erhält man dann, wenn die Meßdauer T wesentlich größer ist als die Verzögerung τ, für die die AKF $\varphi_{xx}(\tau)$ einen wesentlich von Null verschiedenen Wert besitzt.
Mit der Näherung

$$\int_{-T}^{+T}(1 - \frac{|\tau|}{T})\tilde{\varphi}_1(\tau)d\tau \approx \int_{-T}^{+T}\tilde{\varphi}_1(\tau)d\tau \approx \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}_1(\tau)d\tau$$

und durch Substitution des Arguments

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{xx}(\tau)\cdot\cos\omega_m\tau d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{xx}(\tau)\cdot\cos\omega_m(\tau-2t_\Delta)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{xx}(\tau)\cdot\cos\omega_m(\tau+2t_\Delta)d\tau$$

erhält man durch trigonometrische Umformung

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} \approx \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{Ta_1^2\sin^2\omega_m t_\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{xx}(\tau)\cos\omega_m\tau\cdot(1-\cos 2\omega_m t_\Delta)d\tau$$

$$= \frac{2}{Ta_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{xx}(\tau)\cos\omega_m\tau d\tau = \frac{2}{Ta_1^2}\,\mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\}\Big|_{\omega=\omega_m}$$

$$= \frac{2}{Ta_1^2}\cdot\Phi_{xx}(\omega_m) \tag{2.39}$$

Da das Signal $x_n(t)$ in der Bandlücke bei ω_m nur Anteile vom Störsignal n(t) besitzt, sind die Varianzen der Schätzwerte damit proportional zur Leistungsdichte des Störsignals n(t).

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} \approx \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \approx \frac{2}{Ta_1^2}\,\Phi_{nn}(\omega_m) \qquad (2.40)$$

Ähnlich wie bei der Messung der spektralen Leistungsdichte im Kapitel 2.2.2 läßt sich auch hier ein Vertrauensbereich angeben, in dem der wahre Wert für die komplexe Übertragungsfunktion mit einer bestimmten statistischen Sicherheit liegt. Bei großer Meßdauer T kann man wieder davon ausgehen, daß die Schätzwerte näherungsweise gaußverteilt sind, sodaß sich für die Schranken aufgrund der Erwartungstreue folgende Beziehungen ergeben

$$\hat{R} - v(S) \cdot \sigma_{\hat{R}} < R < \hat{R} + v(S) \cdot \sigma_{\hat{R}}$$

$$\hat{I} - v(S) \cdot \sigma_{\hat{I}} < I < \hat{I} + v(S) \cdot \sigma_{\hat{I}} \qquad (2.41\ a, b)$$

wobei

$$\sigma_{\hat{R}} \approx \sigma_{\hat{I}} \approx \sqrt{\frac{2\,\Phi_{nn}(\omega_m)}{T}} \cdot \frac{1}{a_1} \qquad (2.42)$$

ist.

Gibt man einen maximalen Fehler ε_H vor, der mit der statistischen Sicherheit S nicht überschritten wird, so läßt sich für eine bestimmte Amplitude a_1 des gesendeten Sinussignals die nötige Meßzeit T berechnen.

Aus Gleichung (2.41) und Gleichung (2.42) erhält man

$$T \approx 2 \cdot \Phi_{nn}(\omega_m) \cdot \left[\frac{v(S)}{a_1 \varepsilon_H}\right]^2 \qquad (2.43)$$

Für den Fall, daß die Meßdauer T vorgegeben ist, erhält man die nötige Amplitude a_1 mit

$$a_1 \approx \frac{v(S)}{\varepsilon_H} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Phi_{nn}(\omega_m)}{T}} \qquad (2.44)$$

2.3. Realisierter Meßaufbau

Für den Tonfrequenzbereich wurde ein Meßaufbau realisiert, der es erlaubt, beliebige analoge Systeme im Bereich bis 8 kHz nach dem verallgemeinerten Rauschklirrmeßverfahren auszumessen. Die in Kapitel 4 vorgestellten Meßergebnisse wurden damit gewonnen.

Im folgenden wird außer einer Funktionsbeschreibung anhand eines Blockschaltbildes auch eine kurze Zusammenfassung der umfangreichen Untersuchungen zur Dimensionierung der einzelnen Komponenten des Meßaufbaus gegeben.

2.3.1. Funktionsbeschreibung

Anhand von Bild 2.4 sei die Funktion des realisierten Meßaufbaus erläutert.

Das Testsignal u kann einer beliebigen analogen oder digitalen Quelle entnommen werden. Es gelangt nach einer gegebenenfalls nötigen A/D-Wandlung auf die Bandsperre, wonach es in ein Analogsignal zurückgewandelt wird.

Die pegelmäßge Anpassung an das Meßobjekt erfolgt mit einem ohmschen Abschwächer. Das Ausgangssignal des Meßobjekts y(t) wird nach einer Pegelanpassung durch einen Verstärker und A/D-Wandlung bandpaßgefiltert, so daß nur die in der Bandlücke enthaltenen Signalanteile x(k) zur Auswerteeinheit gelangen.

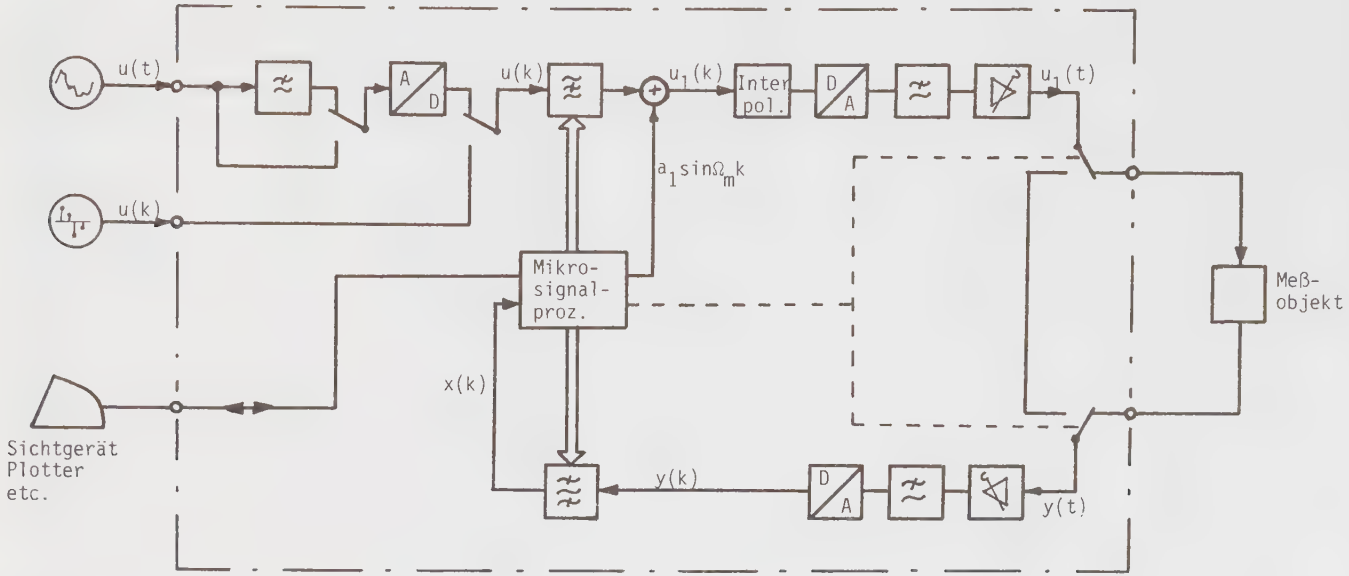


Bild 2.4.: Blockschaltbild des Meßplatzes

Die Bandsperre und der Bandpaß wurden wegen der nötigen kontinuierlichen Einstellbarkeit der Mittenfrequenzen und der erforderlichen Qualität als mehrkanaliges rekursives digitales Filter realisiert. Die Programmierung dieses Filters, die Steuerung des Meßaufbaus sowie die Auswertung der Meßdaten erfolgt durch einen Mikrosignalprozessor (MSP)/8/. Ein an den MSP angeschlossenes Sichtgerät erlaubt die numerische wie auch graphische Ausgabe der Meßergebnisse und den Zugriff auf die Meßparameter.

Der vom Programm des MSP gesteuerten Meßvorgang wird gestartet, nachdem der gewünschte Frequenzbereich und dessen Auflösung, sowie die Parameter zur Festlegung der Meßgenauigkeit (vergleiche Kapitel 2.3.4) eingegeben wurden. Der MSP programmiert zuerst für die niedrigste Meßfrequenz die Bandsperre und den Bandpaß, indem er die dazugehörigen Koeffizientensätze an das digitale Filter übergibt. Die Koeffizientensätze berechnet der MSP mittels einer Allpaßtransformation zweiten Grades aus den Koeffizientensätzen eines Prototyphoch- bzw. -tiefpasses. Nach Abwarten einer Einschwingzeit die im wesentlichen vom Bandpaß bestimmt wird, wird ein Schätzwert für die spektrale Störleistungsdichte $\Phi_{nn}(\omega)$ entsprechend Gleichung (2.7) ermittelt.

Nach Berechnung der Amplitude a_1 der Sinusfolge nach Gleichung (2.44) wird das Sinussignal vom MSP generiert und nach Abwarten der Einschwingzeit ein Schätzwert für die komplexe Obertragungsfunktion $H(j\omega)$ nach Gleichung (2.28) berechnet. Dabei gehen in die Messung auch die Obertragungsfunktionen des Bandpasses und der zur D/A- und A/D-Wandlung nötigen Komponenten ein. Deshalb erfolgt eine zweite Messung mit überbrücktem Meßobjekt. Hierfür werden die Schalter (Bild 2.4) vom MSP gesteuert umgelegt. Durch Division der beiden Obertragungsfunktionen ergibt sich dann die des Meßobjekts. Abschließend wird noch ein Schätzwert der spektralen Leistungsdichte $\Phi_{yy}(\omega)$ des Ausgangssignals $y(t)$ ermittelt, wobei die Koeffizienten der Bandsperre so vom MSP geändert werden, daß das Filter nur als Verzögerungsglied wirkt.

Dieser Vorgang wird anschließend für die um einen vorgegebenen Wert höhere Meßfrequenz wiederholt, u. s. w. bis der gewählte Frequenzbereich ausgemessen wurde. Nach Abschluß der Messung stehen von der Programmierung des MSP her vielfältige Möglichkeiten zur graphischen und numerischen Ausgabe der Meßergebnisse zur Verfügung. Näheres hierzu ist einer Bedienungsanleitung für den erstellten Meßaufbau zu entnehmen.

2.3.2. Dimensionierung hinsichtlich optimaler Genauigkeit

Gemäß den Aussagen von Kapitel 2.2. hängt die Genauigkeit der Meßergebnisse zum einen von der Schätzwertbildung selbst ab, und zum anderen von der Übereinstimmung des Signals $u_1(t)$, welches zum Meßobjekt gelangt, mit dem eigentlichen Testsignal u(t). Auf die Schätzwertbildung hat man Einfluß durch frei wählbare Meßzeiten und die Amplitude des sinusförmigen Signals. Die Forderung, die statistischen Eigenschaften des Testsignals auf dem Weg zum Meßobjekt möglichst wenig zu verändern, wurde speziell für die Amplitudenverteilungsdichte und die Autokorrelationsfunktion überprüft und führte zu den im folgenden angegebenen Dimensionierungen.

2.3.2.1 Tiefpaßfilter und A/D-Wandler für das Eingangssignal u(t)

Falls das Meßsignal u(k) nicht bereits digital vorliegt, muß eine A/D-Wandlung erfolgen. Im Fall eines bandbegrenzten Eingangssignals u(t) hat dies keinen Einfluß auf die Signaleigenschaften. Bei nicht bandbegrenztem Meßsignal erfolgt durch die Wandlung immer eine wesentliche Veränderung der Signaleigenschaften, entweder durch eine analoge Bandbegrenzung oder durch eine Rückfaltung bei der Abtastung. Deshalb ist ein nicht bandbegrenztes Testsignal wegen der digital arbeitenden Bandsperre prinzipiell nicht geeignet, es sei denn, man betrachtet das entstandene digitale Signal u(k) als eigentliches Meßsignal.

Aus diesen Oberlegungen heraus wurde ein einfaches Tiefpaßfilter realisiert. Es handelt sich um das LC-Cauerfilter 7. Grades C 072553 /9/, dem eine Verstärkerstufe zur Impedanz- und Pegelanpassung vorgeschaltet ist.

Die Abtastfrequenz des Wandlers beträgt 20 kHz. Damit lauten die Daten des Tiefpasses

Durchlaßfrequenz	8	kHz
Sperrgrenzfrequenz	10	kHz
Dämpfung im Durchlaßbereich	0,3	dB
Dämpfung im Sperrbereich	60	dB

2.3.2.2 Bandsperre

Zur meßtechnischen Bestimmung des Einflusses der Bandsperre auf die Amplitudenverteilung des Signals wurde eine Vielzahl von Filtern mit unterschiedlichen Parametern δ_S, δ_D, Ω_m, $\Delta\Omega_D$, $\Delta\Omega_S$ und Grad des Filters (vergleiche Bild 2.5) und Cauerapproximation entworfen /10/. Ein rekursives digitales Filter wurde entsprechend eingestellt und bei verschiedenen stochastischen Eingangssignalen die Amplitudenverteilung des Ausgangssignals im eingeschwungenen Zustand gemessen. Dazu wurde die Auftrittshäufigkeit der Amplitudenwerte in 256 gleich breiten Intervallen ausgezählt.

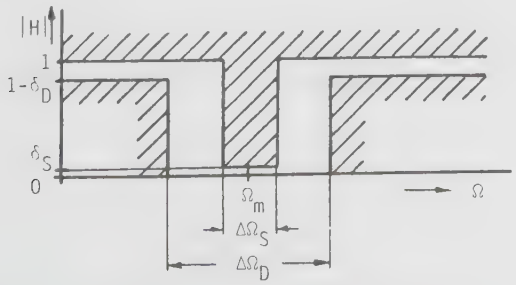


Bild 2.5.: Toleranzschema der Bandsperre

Das Ergebnis läßt sich wie folgt kurz zusammenfassen : Bei einem gleichverteilten weißen Signal wirkt sich im wesentlichen die Sperrbandbreite $\Delta\Omega_S$ aus. Dabei zeigte sich, daß der Phasengang des Filters den wesentlichen Einfluß auf die Amplitudenverteilung hat. Die Stärke der Veränderung wächst mit $\Delta\Omega_S$ (Bild 2.6).

Bei einem K_o-verteilten farbigen Signal, das nach /11/ die statistischen Eigenschaften der Sprache approximiert, ging der wesentliche Einfluß von der Flankensteilheit $\Delta\Omega_D/\Delta\Omega_S$ aus (Bild 2.7).

Aufgrund dieser Ergebnisse wurden zunächst folgende Parameter gewählt :

$$\delta_D = 0{,}023 \qquad (\hat{=}\ 0{,}2\ \text{dB})$$

$$\delta_S = 0{,}00016 \qquad (\hat{=}\ 76\ \text{dB})$$

$$\Delta\Omega_D/\Delta\Omega_S = 4{,}7$$

Diese Forderungen werden von einem Cauerfilter vom Grad n = 8 erfüllt.

Von der Sperrbandbreite $\Delta\Omega_S$ der Bandsperre hängt die maximal mögliche 3-dB-Bandbreite des Bandpasses ab, die wiederum die minimale Meßzeit nach Gleichung (2.30) bestimmt. Als Optimum erschien der Wert $\Delta\Omega_S = 0{,}005\,\pi$, was bei einer Abtastrate von 20 kHz der Breite $\Delta f_S = 50$ Hz entspricht.

Die Autokorrelationsfunktion des Signals wird durch die Bandsperre nur wenig verändert, da durch die schmale Bandlücke das Leistungsdichtespektrum zum größten Teil unbeeinflußt bleibt.

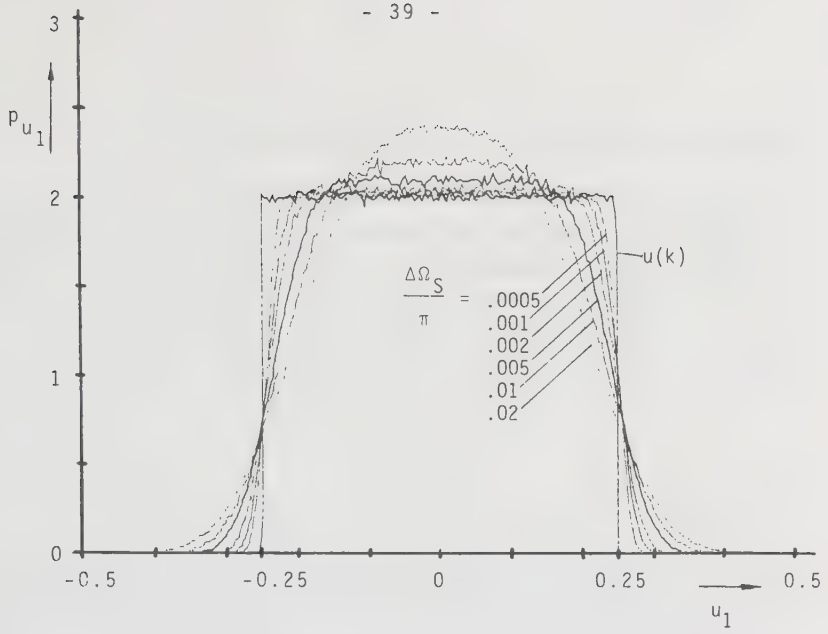


Bild 2.6 : Verteilungsdichte als Funktion der Sperrbreite
Spektrum: "weiß", $\Delta\Omega_D = 2\cdot\Delta\Omega_S$, n = 14, $\Omega_m = 0{,}1\cdot\pi$

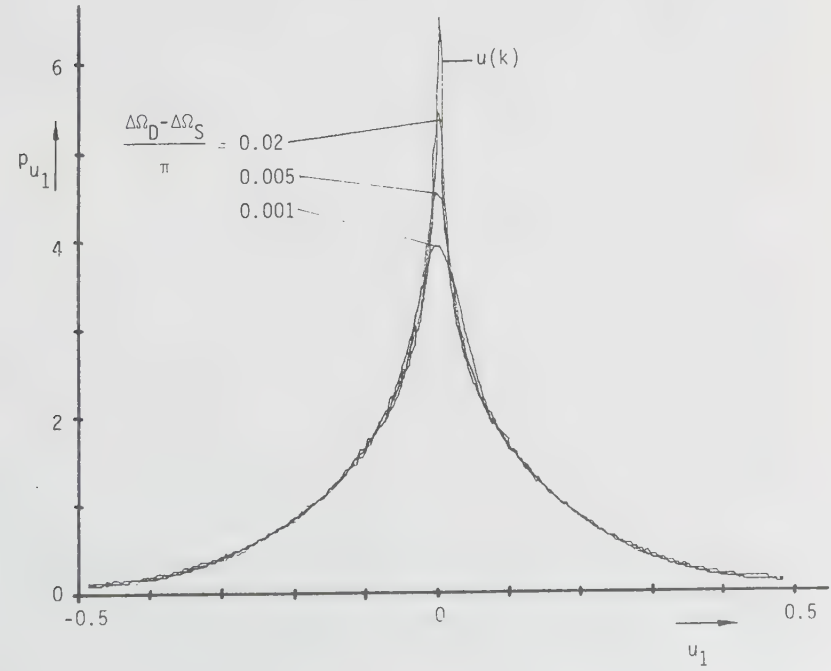


Bild 2.7 : Verteilungsdichte als Funktion der Flankensteilheit
Spektrum: sprachähnlich, $\Delta\Omega_S = 0{,}005\pi$, $\Omega_m = 0{,}1\pi$

2.3.2.3 Interpolationsfilter und D/A-Wandler

Das aus einem digitalen Signal durch eine D/A-Wandlung gewonnene analoge Signal ist bekanntlich wegen seines stufenförmigen Verlaufs nicht bandbegrenzt. Eine exakte (bandbegrenzte) Rekonstruktion des analogen Signals erhält man dann, wenn das gesamte Wandlersystem auf einen digitalen Eingangsimpuls $\gamma_0(k)$ mit der analogen Zeitfunktion

$$h_0(t) = \sin(\pi f_A t)/\pi f_A t \qquad (2.45)$$

reagiert, wobei f_A die Abtastrate ist.

Durchgeführte Untersuchungen haben ergeben, daß ein digitaler Interpolator, mit dem eine Erhöhung der Abtastfrequenz von der D/A-Wandlung um den Faktor $r > 1$ erreicht wird, zu einer wesentlichen Reduzierung des Einflusses der Glättung auf die Verteilung führt. Wesentlich dafür ist der lineare Phasengang dieser Filter. Verwendet wurde ein Entwurf nach Oetken /12/, /13/, bei dem der Effektivwert des Interpolationsfehlers minimal wird, wenn das Eingangssignal ein bis zur Grenzfrequenz konstantes Spektrum besitzt.

Folgende Parameter wurden gewählt:

Interpolationsrate	r	=	8
effektiver Interpolationsfehler	$\|\|\Delta y\|\|$	<	0.003
Grenzfrequenz /r • π	α	=	0.8

Die verbleibende geringe Stufigkeit des Wandlerausgangssignals wird durch einen analogen Tiefpaß zweiten Grades eliminiert, für den wegen des Phasenverhaltens eine Besselcharakteristik gewählt wurde /14/. (Vergleiche Kapitel 2.3.3.3) Die Dämpfung der Spektralanteile oberhalb der halben Abtastfrequenz ist damit größer als 54 dB. Abschließende Messungen haben ergeben, daß die Verteilungsdichte eines Signals, das keine Spektralanteile oberhalb der Grenzfrequenz des Interpolationsfilters von 8 kHz besitzt, nicht meßbar verändert wird.

2.3.2.4 Tiefpaß und A/D-Wandler für das Ausgangssignal y(t)

Da aus dem Ausgangssignal y(t) des Meßobjekts nur die in der Bandlücke befindlichen Signalanteile mit dem Bandpaß ausgefiltert werden, ist die einzige Forderung an den für die A/D-Wandlung nötigen Tiefpaß, daß seine Amplitudenübertragungsfunktion im Durchlaßbereich möglichst konstant den Wert Eins besitzt. Realisiert wurde ein passiver LC-Tiefpaß, der gleich dem in Abschnitt 2.3.2.1 beschriebenen Eingangstiefpaß ist.

2.3.2.5 Bandpaß

Die Amplitudenübertragungsfunktion des Bandpasses hat direkten Einfluß auf die Schätzwertbildung der spektralen Leistungsdichte (vergleiche Gleichungen (2.7), (2.9)). Dabei ist der systematische Fehler nach Gleichung (2.14) proportional zum Quadrat der Bandbreite. Andererseits steigt die Meßdauer nach Gleichung (2.30) umgekehrt proportional zur Bandbreite. Als Optimum wurde die Bandbreite betrachtet, die bei einer Meßdauer von 10 Sekunden und einer statistischen Sicherheit von 80 % eine Meßgenauigkeit von 0,5 dB ergab. Die Betragsquadratfläche $\Delta\Omega$ beträgt dann

$$\Delta\Omega = \Delta\omega / f_A = 2\pi \cdot 25\ \text{Hz} / 20\ \text{kHz} = 0{,}0025\pi \qquad (2.46)$$

Die Bandpässe für verschiedene Mittenfrequenzen werden durch eine Allpaßtransformation zweiten Grades aus einem Prototyptiefpaß errechnet, indem die Variable z der Tiefpaßübertragungsfunktion durch

$$\zeta = - \frac{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + 1} \qquad (2.47)$$

ersetzt wird. /10/. Anzustreben ist, daß die Betragsquadratfläche $\Delta\Omega$ unabhängig von der Meßfrequenz wird, damit der Nenner der Gleichung (2.7) konstant ist, wodurch kein Einfluß auf die Meßgenauigkeit der Leistungsdichte gegeben ist.

Dies läßt sich dadurch erreichen, daß der Parameter α_o in Gleichung (2.47) konstant gehalten wird (siehe Kapitel 2.3.4.1).

Die Dimensionierung der noch freien Parameter des Bandpasses erfolgt in Kapitel 2.3.3.5.

2.3.3. Dimensionierung hinsichtlich maximaler Dynamik

Die untere Grenze des Dynamikbereichs für die Messung ist sicherlich dann erreicht, wenn im Ausgangssignal des Bandpasses störende vom Meßaufbau bedingte Signalanteile die gleiche Leistung besitzen wie das eigentlich zu messende Signal. Diese störenden Signalanteile sind durch endliche Dämpfung von Bandpaß und Bandsperre sowie vom Eigenrauschen der Komponenten des Meßaufbaus bedingt. Während man bei den digital realisierten Komponenten diese Werte im Griff hat /15/, /16/, stößt man bei den D/A-Wandlern und stärker noch bei den A/D-Wandlern an technologische Grenzen. Die dynamikbegrenzende Komponente des Meßaufbaus ist deshalb der A/D-Wandler zwischen Meßobjekt und Bandpaß. Die folgenden Dimensionierungen beziehen sich auf die Leistungsdichte des Quantisierungsgeräusches dieses mit 14 bit Wortlänge realisierten Wandlers.

2.3.3.1 Tiefpaß und A/D-Wandler für das Eingangssignal u(t)

Diese Komponenten haben keinen Einfluß auf die Dynamik des Meßaufbaus, da vor der Bandsperre entstehende Störsignale nicht in die Bandlücke gelangen können. Es genügt deshalb die Verwendung eines 12 bit-Wandlers.

2.3.3.2 Bandsperre

Die nach der Bandsperre in der Bandlücke verbleibenden spektralen Anteile sind Reste des Testsignals durch endliche Sperrdämpfung und Teile des Eigenrauschens des Filters. Aus der Forderung, daß diese Anteile maximal die gleichen spektralen Leistungsdichten besitzen wie das Wandlergeräusch des 14 bit-Wandlers, erhält man die Dimensionierungsvorschriften.

a) Sperrdämpfung

Nimmt man den Effektivwert des Testsignals maximal zu

$$u_{eff,\,max} = 0{,}25$$

an, so muß die Sperrdämpfung 90 dB betragen.

Zusammen mit der Dimensionierung nach Kapitel 2.3.2.2 und dem Frequenzverhalten des Bandpasses (Kapitel 2.3.3.5) erfolgt die endgültige Dimensionierung der Cauerbandsperren.

Dämpfung im Durchlaßbereich	$a_D = 0{,}2$ dB
Dämpfung im Sperrbereich	$a_S = 90$ dB
Durchlaßbandbreite	$\Delta\Omega_D = 0{,}0234\,\pi$
Sperrbandbreite	$\Delta\Omega_S = 0{,}0034\,\pi$
Grad	$n = 8$

b) Eigenrauschen

Der arithmetische Rundungsfehler gelangt im digitalen Filter als spektral gefärbtes Rauschen zum Ausgang. Bei der gewählten Struktur des digitalen Filters (Kaskade von Blöcken 2. Grades in 1. kanonischer Form in verteilter Arithmetik /16/) wächst die Leistung des Rundungsgeräusches mit abnehmender Mittenfrequenz der Bandsperre stark an. Da die Stärke des Rundungsgeräusches mit Erhöhung der internen Wortlänge der Zustandsvariablen abnimmt, läßt sich die nötige zusätzliche Wortlänge Δw bestimmen, für die die Leistungsdichte des Rundungsgeräusches mit der des Quantisierungsgeräusches des 14 bit-Wandlers übereinstimmt /10/.

Durch Veränderung der Reihenfolge der Blöcke 2. Grades und der Zuordnung von Polen und Nullstellen läßt sich eine Minimierung des Leistungsdichtewertes und damit des Wertes Δw erreichen.

Dahingehende umfangreiche Untersuchungen mit dem Entwurfs- und Optimierungsprogramm DOREDI /17/ haben zur Festlegung der Blockreihenfolge und der internen Wortlänge auf 24 bit geführt. Bei Meßfrequenzen im Bereich von $0{,}012\pi$ bis $0{,}988\pi$ ($\hat{=}$ 120 Hz bis 9,88 kHz) ist damit die Leistungsdichte des Eigenrauschens in der Bandlücke geringer als die des 14 bit-Wandlers (vergleiche Bild 2.8).

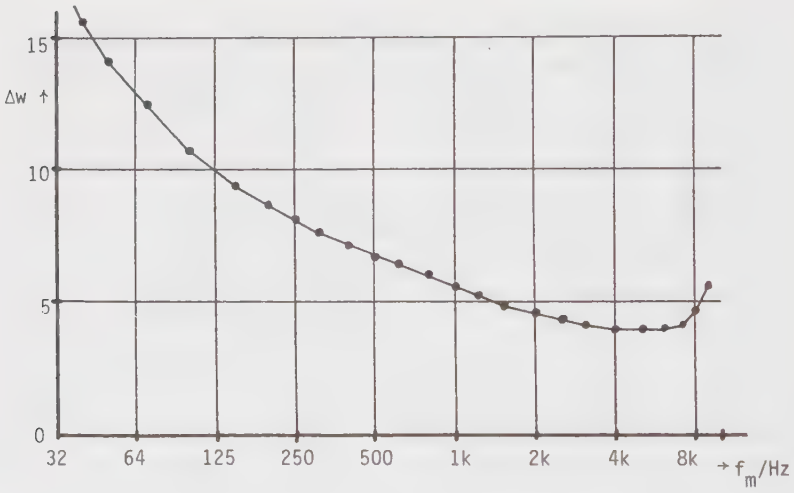


Bild 2.8 : Zusätzliche interne Wortlänge der Bandsperre in Abhängigkeit von der Mittenfrequenz

Die Wortlänge der Ausgangsfolge der Bandsperre wird auf 16 bit verkürzt. Das dadurch entstehende Rundungsgeräusch besitzt nur den 16-ten Teil der Leistungsdichte des Quantisierungsgeräusches des 14 bit-Wandlers und ist somit vernachlässigbar.

2.3.3.3 Interpolationsfilter und D/A-Wandler

Die interne Wortlänge des nichtrekursiven digitalen Interpolationsfilters wurde so hoch gewählt, daß praktisch nur die Wortlängenverkürzung der Ausgangsfolge auf 16 bit ein Rundungsgeräusch hervorruft. Durch die achtfach höhere Abtastrate der Ausgangsfolge wird zudem die Leistung des Rundungsgeräusches auf einen größeren Frequenzbereich gespreizt, so daß im Vergleich zum 14 bit-Wandler die Leistungsdichte um den Faktor 128 geringer ist.

Der D/A-Wandler wurde mit einer Wortlänge von 16 bit realisiert. Zur Pegel- und Impedanzanpassung ist dem eigentlichen Wandlermodul ein Verstärker nachgeschaltet. Damit dieser trotz seines sich sprungförmig ändernden Eingangssignals immer linear arbeitet und damit keine Störgeräusche produziert und der stufige Verlauf des Wandlersignals geglättet wird, mußte ihm ein Tiefpaßverhalten gegeben werden. Es wurde dabei ein Besseltiefpaß zweiten Grades mit einer 3 dB-Grenzfrequenz von 25 kHz approximiert.

Die eigentliche D/A-Wandlung liefert theoretisch keine Störleistung, da die Quantisierung auf 16 bit bereits im Interpolationsfilter geschieht. Die durch thermisches Rauschen und nicht exakter Wandlerkennlinie hervorgerufene Störleistung ist vernachlässigbar im Bezug auf die des 14 bit-Wandlers.

2.3.3.4 Tiefpaß und A/D-Wandler für das Ausgangssignal y(t)

Das Tiefpaßfilter vor der A/D-Wandlung wurde passiv aufgebaut, um keine zusätzliche Rauschquelle zu erhalten. (Dimensionierung siehe Kapitel 2.3.2.1) Das Eigenrauschen des vorgeschalteten Verstärkers zur Pegel- und Impedanzanpassung ist vernachlässigbar.

Der realisierte 14 bit-A/D-Wandler stellt bezüglich des Eigenrauschens das schwächste Glied in der Kette des Meßaufbaus dar.

Messungen haben ergeben, daß bei geringer Aussteuerung die tatsächliche Quantisierungsstörleistung dem theoretischen Wert

$$N_Q = \frac{Q^2}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4^{14}} \qquad (2.48)$$

in etwa entspricht. Bei einem Signalpegel nahe der Aussteuerungsgrenze wird diese Leistung des weißen Störsignals bis zu viermal so groß, was auf Nichtlinearitäten der Wandlerkennlinie und des Abtasthaltegliedes zurückzuführen ist.

2.3.3.5 Bandpaß

Die im Ausgangssignal x(k) des Bandpasses enthaltenen störenden Signalanteile haben im wesentlichen vier Ursachen:

1. Reste des Testsignals aufgrund endlicher Sperrdämpfung
2. Anteil des Quantisierungsgeräusches des 14 bit-A/D-Wandlers
3. Eigenrauschen des Bandpasses
4. Quantisierungsgeräusch durch Wortlängenverkürzung des Ausgangssignals x(k) auf 16 bit.

Durch Gleichsetzen der Reste des Nutzsignals mit dem Anteil des Wandlergeräusches wird die nötige Sperrdämpfung ermittelt. Sie besitzt bei einem Effektivwert des Testsignals von

$$u_{eff,\,max} = 0{,}25$$

und einer Betragsquadratfläche des Bandpasses von $\Delta\Omega = 0{,}0025\pi$ (vergleiche Kapitel 2.3.2.5) einen Wert von $a_S = 103$ dB.

Die Sperrbandbreite des Bandpasses muß so gewählt werden, daß keine Signalanteile vom Testsignal zur Auswertung gelangen, das heißt die Sperrbandbreiten von Bandsperre und Bandpaß müßten im Idealfall, wie in Bild 2.9 skizziert, gleich sein.

Dabei wäre jedoch die Gesamtdämpfung des Testsignals in den Übergangsbereichen größer als erforderlich, weshalb eine teilweise Überlappung der Übergangsbereiche gestattet ist.

Bild 2.10 zeigt die Dämpfungsfrequenzgänge für Bandpaß und -sperre für die gewählten Parameter.

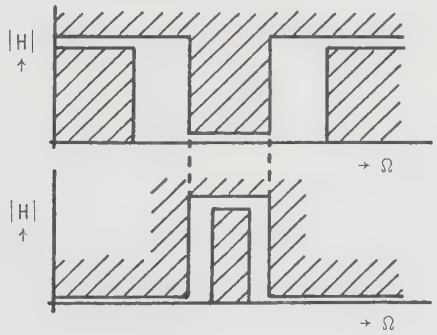


Bild 2.9.: Toleranzschema von Bandsperre und Bandpaß

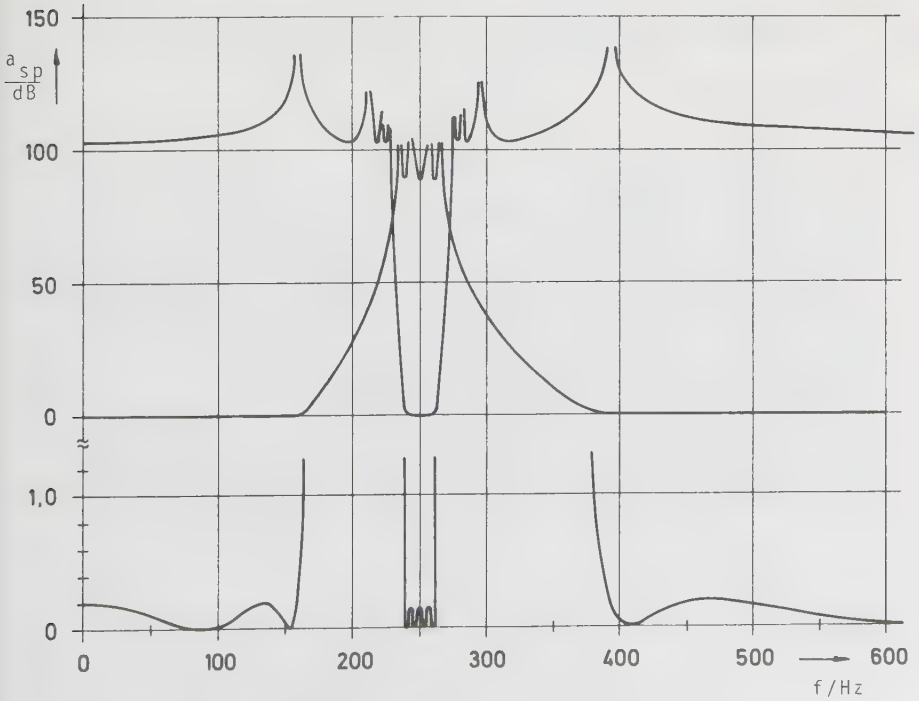


Bild 2.10: Dämpfungsfrequenzgänge von Bandsperre und Bandpaß bei f_m = 250 Hz

Für den Bandpaß wurden folgende Parameter gewählt :

Dämpfung im Durchlaßbereich	$a_D = 0{,}13$ dB
Dämpfung im Sperrbereich	$a_S = 103$ dB
Durchlaßbandbreite	$\Delta\Omega_D = 0{,}002\pi$
Sperrbandbreite	$\Delta\Omega_S = 0{,}005\pi$
Grad	$n = 16$
Approximation	Equalripple mit Mehrfachpolen /18/

Zur Bestimmung des Maximalwerts $|H_{BP}(\Omega)|_{max}$ der Amplitudenübertragungsfunktion ($\neq 1$!) wird der Anteil des Wandlergeräusches gleich dem Quantisierungsgeräusches durch die Wortlängenverkürzung des Ausgangssignals gesetzt. Damit erhält man

$$|H_{BP}(\Omega)|_{max} = 5{,}6$$

realisiert wurde

$$|H_{BP}(\Omega)|_{max} = 8$$

Zur Minimierung des Eigenrauschens wurden Untersuchungen entsprechend denen in Kapitel 2.3.3.2 durchgeführt. Dabei stellte sich die Approximationsart mit Equalripple und Mehrfachpolen /18/ auch bei Digitalfiltern als günstig heraus. Bei einer Zustandsvariablenwortlänge von 24 bit liegt der Bereich der Meßfrequenzen, für die die Eigenrauschleistung geringer ist, als der Leistungsanteil des Wandlergeräusches, zwischen $0{,}025\pi$ und $0{,}975\,\pi$ ($\hat{=}$ 250 Hz bis 9,75 kHz) (vergleiche Bild 2.11)

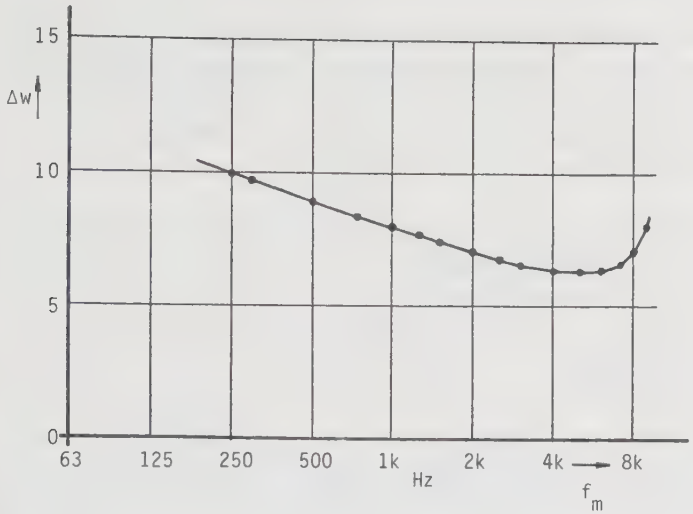


Bild 2.11 : Zusätzliche interne Wortlänge des Bandpasses in Abhängigkeit von der Mittenfrequenz

2.3.4. Dimensionierung der Auswerte- und Steuereinheit

Die Steuerung des Meßaufbaus und die Ermittlung und Auswertung der Meßdaten geschieht mittels eines umfangreichen Programms am Mikrosignalprozessor (MSP). Im folgenden werden die wesentlichen Beziehungen, die den Unterprogrammen zur Berechnung der Filterkoeffizienten und der Messung der spektralen Leistungsdichte und der komplexen Übertragungsfunktion zugrunde liegen, hergeleitet. Das Gesamtprogramm ist in der Bedienungsanleitung zum erstellten Meßaufbau näher erläutert.

2.3.4.1 Berechnung der Filterkoeffizienten

Ausgehend von den Polen und Nullstellen eines Prototyptief- bzw. -hochpasses werden mit einer Allpaßtransformation 2. Grades die Pole und Nullstellen des Bandpasses bzw. der Bandsperre berechnet. Für den Bandpaß wird die komplexe Gleichung 2. Grades

$$z_{TP} = - \frac{z_{BP}^2 + \alpha_1 z_{BP} + \alpha_0}{\alpha_0 z_{BP}^2 + \alpha_1 z_{BP} + 1} \tag{2.49}$$

gelöst. Man erhält

$$z_{BP\ 1,\ 2} = \frac{1}{2(\alpha_0 z_{TP}+1)} \left(-\alpha_1 (z_{TP}+1) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{(z_{TP}^2+1)(\alpha_1^2-4\alpha_0)+2z_{TP}(\alpha_1^2-2\alpha_0^2-2)} \right)$$

(2.50)

Mit den beiden Parametern α_0 und α_1 lassen sich zwei Frequenzgrenzen des Bandpasses vorgeben /10/, speziell z. B. Mittenfrequenz und Bandbreite.

Um die Messung der spektralen Leistungsdichte einfach zu gestalten, ist es sinnvoll, den Nenner der dazu verwendeten Beziehung (2.7), die Betragsquadratfläche des Bandpasses, konstant zu halten. Die beiden Parameter α_0 und α_1 sind also so zu bestimmen, daß zum einen die gewünschte Mittenfrequenz erzielt wird, worunter die arithmetische Mitte zwischen den Durchlaßgrenzen des Bandpasses gemeint ist, also

$$\Omega_{BP,\ M} = \frac{1}{2} (\Omega_{BP,\ D1} + \Omega_{BP,\ D2}) \quad , \tag{2.51}$$

und zum anderen, daß für die Betragsquadratfläche

$$2 \cdot \int_0^{\pi} |H_{BP}(\Omega)|^2 d\Omega = \text{konst} \qquad (2.52)$$

gilt. Zur Lösung setzt man

$$z_{TP} = e^{j\Omega_{TP}} \quad ; \quad z_{BP} = e^{j\Omega_{BP}} \qquad (2.53)$$

in die Gleichung (2.49) ein und erhält nach geeigneter Umformung die bekannte Beziehung /10/

$$\Omega_{TP} = 2 \cdot \arctan \frac{(\alpha_o + 1)\cos\Omega_{BP} + \alpha_1}{(\alpha_o - 1)\sin\Omega_{BP}} \qquad (2.54)$$

Für die weitere Rechnung wird die Umkehrfunktion der Beziehung (2.54) benötigt. Zu diesem Zweck muß ein Intervall für Ω_{BP} angegeben werden, für das die periodische Funktion (2.54) eine eineindeutige und damit umkehrbare Abbildung darstellt. Da die Parameter α_o und α_1 die Koeffizienten eines stabilen Polpaares (der Allpaßübertragungsfunktion) sind, gilt /10/

$$|\alpha_1| < 1 + \alpha_o \quad ; \quad |\alpha_o| < 1 \qquad (2.55\ a, b)$$

Daraus folgt, daß mit der Gleichung (2.54) das offene Intervall $\Omega_{BP} \in]0, \pi[$ eineindeutig auf das offene Intervall $\Omega_{TP} \in]-\pi, \pi[$ abgebildet wird. In den Bildern 2.12 und 2.13 ist diese Abbildung für $\alpha_o, \alpha_1 > 0$ skizziert.

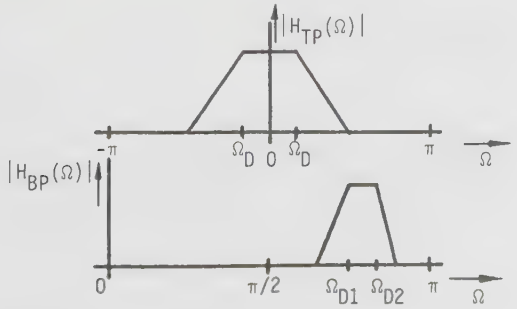


Bild 2.12.: Qualitative Darstellung der TP-BP-Transformation für $\alpha_1, \alpha_0 > 0$

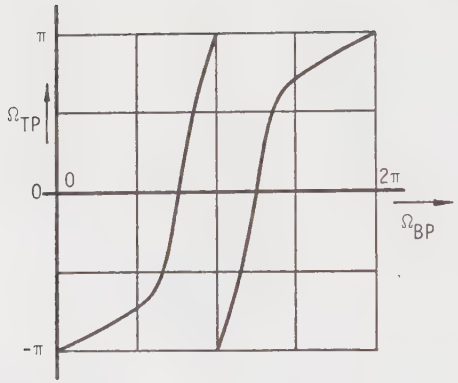


Bild 2.13 : Qualitative Darstellung der Abbildungsfunktion der der TP-BP-Transformation für α_1, $\alpha_0 > 0$

Durch Umformung der Beziehung (2.54) erhält man die Umkehrfunktion

$$\tan\frac{\Omega_{TP}}{2} = -\frac{(1+\alpha_0)\cos\Omega_{BP}+\alpha_1}{(1-\alpha_0)\sin\Omega_{BP}}$$

$$(1-\alpha_0)\tan\frac{\Omega_{TP}}{2}\cdot\sin\Omega_{BP} + (1+\alpha_0)\cos\Omega_{BP} = -\alpha_1$$

$$\sqrt{(1-\alpha_0)^2\tan^2\cdot\frac{\Omega_{TP}}{2}+(1+\alpha_0)^2}\cdot$$

$$\cdot\cos(\Omega_{BP}-\arctan(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\tan\frac{\Omega_{TP}}{2})) = -\alpha_1$$

$$\Omega_{BP} = \arctan\left(\frac{1-\alpha_o}{1+\alpha_o}\tan\frac{\Omega_{TP}}{2}\right)+\arccos\frac{-\alpha_1}{\sqrt{(1-\alpha_o)^2\tan^2\cdot\frac{\Omega_{TP}}{2}+(1+\alpha_o)^2}}$$

(2.56)

Damit läßt sich die Betragsquadratfläche berechnen

$$2\int_0^{\pi}|H_{BP}(\Omega_{BP})|^2 d\Omega_{BP} =$$

$$= 2\int_{\Omega_{TP}(0)}^{\Omega_{TP}(\pi)}|H_{BP}(\Omega_{BP}(\Omega_{TP}))|^2\cdot\frac{d\Omega_{BP}}{d\Omega_{TP}}d\Omega_{TP}$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi}|H_{TP}(\Omega_{TP})|^2\cdot\frac{d\Omega_{BP}}{d\Omega_{TP}}d\Omega_{TP}$$

Wegen der symmetrischen Integrationsgrenzen liefert nur der gerade Anteil des Integranden einen Beitrag zum Integralwert. Da die Betragsquadratfunktion $|H_{TP}(\Omega_{TP})|^2$ gerade ist, genügt es, den ungeraden Anteil von $\Omega_{PP}(\Omega_{TP})$ abzuleiten.

$$2\int_0^{\pi}|H_{BP}(\Omega_{BP})|^2 d\Omega_{BP} =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi}|H_{TP}(\Omega_{TP})|^2\cdot\frac{\frac{1-\alpha_o}{1+\alpha_o}\cdot d\Omega_{TP}}{2\cdot\left[1+\left(\frac{1-\alpha_o}{1+\alpha_o}\right)^2\cdot\tan^2\left(\frac{\Omega_{TP}}{2}\right)\right]\cdot\cos^2\left(\frac{\Omega_{TP}}{2}\right)}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |H_{TP}(\Omega_{TP})|^2 \frac{1-\alpha_o^2}{(1+\alpha_o)^2\cos^2\frac{\Omega_{TP}}{2}+(1-\alpha_o)^2\sin^2\frac{\Omega_{TP}}{2}} d\Omega_{TP}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |H_{TP}(\Omega_{TP})|^2 \frac{1-\alpha_o^2}{1+2\alpha_o\cos\Omega_{TP}+\alpha_o^2} d\Omega_{TP} \qquad (2.57)$$

Der Nenner der Gleichung (2.7)

$$\Delta\omega = f_A \cdot 2\int_{o}^{\pi} |H_{BP}(\Omega_{BP})|^2 d\Omega_{BP}$$

ist somit nur von α_o abhängig.

Die Durchlaßbandbreite $\Delta\Omega_{BP,D}$ des Bandpasses errechnet sich mit Gleichung (2.54)

$$\Delta\Omega_{BP,D} = \Omega_{BP}(\Omega_{TP,D}) - \Omega_{BP}(-\Omega_{TP,D})$$

$$= 2\cdot\arctan\left(\frac{1-\alpha_o}{1+\alpha_o}\tan\frac{\Omega_{TP,D}}{2}\right) \qquad (2.58)$$

Sie hängt ebenfalls nur von Parameter α_o ab.

Für die Mittenfrequenz erhält man mit Gleichung (2.51) folgenden Ausdruck

$$\Omega_{BP,M} = \frac{1}{2}(\Omega_{BP}(\Omega_{TP,D}) + \Omega_{BP}(-\Omega_{TP,D}))$$

$$= \arccos \frac{-\alpha_1}{\sqrt{(1-\alpha_o)^2 \tan^2 \frac{\Omega_{TP,D}}{2} + (1+\alpha_o)^2}} \qquad (2.59)$$

Mit dieser Gleichung läßt sich bei einem mit Gleichung (2.58) festgelegten Parameter α_o der Parameter α_1 in Abhängigkeit von der Mittenfrequenz bestimmen.

Da die Durchlaßfrequenz $\Omega_{TP,D}$ des Prototyptiefpasses bei geeignetem Entwurf frei vorgebbar ist, erhält man in Gleichung (2.58) einen Freiheitsgrad, den man zur Vereinfachung der Rechnung einsetzen kann. So wird die Transformation der Pole und Nullstellen mit Gleichung (2.50) stark vereinfacht, wenn

$$\alpha_o = 0 \qquad (2.60)$$

gesetzt wird. Die Gleichung (2.50) reduziert sich zu

$$z_{BP1,2} = -\alpha_1 \frac{1+z_{TP}}{2} \pm \sqrt{\alpha_1^2 \left(\frac{1+z_{TP}}{2}\right)^2 - z_{TP}} \qquad (2.61)$$

und aus Gleichung (2.59) wird

$$\Omega_{BP,M} = \arccos \frac{-\alpha_1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\Omega_{TP,D}}{2}}}$$

$$= \arccos\left(-\alpha_1 \cdot \cos \frac{\Omega_{TP,D}}{2}\right) \qquad (2.62)$$

Damit berechnet sich der Parameter α_1 in Abhängigkeit von der Mittenfrequenz

$$\alpha_1 = - \frac{\cos\Omega_{BP,M}}{\cos\frac{\Omega_{TP,D}}{2}} \qquad (2.63)$$

Für den Prototyptiefpaß erhält man aus Gleichung (2.58) die Forderung

$$\Omega_{TP,D} = \Delta\Omega_{BP,D} \qquad (2.64)$$

Bei geeignetem Entwurf des Prototyptiefpasses lassen sich die Pole und Nullstellen der Bandsperre mit der selben Transformationsformel (2.61) berechnen.

Durch Zusammenfassen der zueinander konjugiert komplexen Pole bzw. Nullstellen werden die Nenner- bzw. Zählerkoeffizienten der Blöcke 2. Grades bestimmt, woraus die Tafelinhalte für die verteilte Arithmetik errechnet und dem Filter übergeben werden (vergleiche Kapitel 2.3.3.2). Um die benötigte Genauigkeit der Koeffizienten von 24 bit für alle Pol- und Nullstellenlagen einzuhalten, ist bei der numerischen Durchführung der Gleichung (2.61) die Berechnung des Radikanten und der Wurzel mit einer Genauigkeit von 64 bit nötig, da hier eine Differenz von zwei (komplexen) Größen, die betragsmäßig etwa 1 sein können, auftritt.

Im Anhang A 3 finden sich die Zahlenwerte für die Pole und Nullstellen der Prototypfilter sowie die Skalierungsfaktoren und die Anordnung der Blöcke 2. Grades.

2.3.4.2. Messung der Rauschleistungsdichte

Um die in Kapitel 2.2.2. ermittelten Genauigkeitsangaben auf den digitalen Fall übertragen zu können, muß gewährleistet sein, daß durch die Abtastung keine Überfaltung des Spektrums des Signals $x_n(t)$ erfolgt. Bei Verarbeitung jedes Abtastwertes zur Leistungsbestimmung ist diese Forderung erfüllt, es ergäben sich dann aus der nötigen Meßzeit nach Gleichung (2.30)

$$N_{max} = T \cdot f_A = 20000 \cdot T/sec$$

Abtastwerte. Wegen der geringen Bandbreite des Signals $x_n(t)$ ist eine Unterabtastung nach dem Bandpaß um den Faktor l sinnvoll. Eine notwendige Bedingung für die effektive Abtastrate f_A/l ist, daß sie mindestens das Doppelte der maximalen Bandbreite des Bandpaßgeräusches $x_n(t)$ beträgt. Ausgehend von der Sperrbandbreite $\Delta\omega_S$ des Bandpasses erhält man für die maximale Unterabtastrate l die notwendige Beziehung

$$2\pi f_A/l \geq 2 \cdot \Delta\omega_S = 2 f_A \Delta\Omega_S$$

$$\Rightarrow \quad l \leq \frac{\pi}{\Delta\Omega_S} = 200 \qquad (2.65)$$

Eine hinreichende Bedingung für die Unterabtastrate l hängt von der Mittenfrequenz ω_m ab, so daß i. a. für einen Meßdurchlauf kein konstanter Wert $l \neq 1$ vorgebbar ist.

Im folgenden wird der Genauigkeitsverlust ermittelt, der sich bei Vorgabe der Unterabtastrate nach Gleichung (2.65) ergibt.

Die Messung der Rauschleistungsdichte geschieht praktisch nach der Gleichung (2.7) wobei der Faktor $\pi/\Delta\omega$ als Konstante abgespeichert ist und das Integral der Gleichung (2.8) wegen der digitalen Verarbeitung in einen Summenausdruck übergeht:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} x_n^2((k-\nu \cdot l)/f_A) \qquad (2.66)$$

Hier wird N so gewählt, daß die Meßdauer mindestens T beträgt, also

$$N \geq \frac{T \cdot f_A}{l} \qquad (2.67)$$

mit f_A = Abtastfrequenz.

Da eine Abtastung des Zeitsignals auch eine Abtastung der AKF bedeutet, geht die Ungleichung (2.19) über in

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} < \frac{2\pi^2}{\Delta\omega^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}^2(\nu \cdot l/f_A)$$

$$\leq \frac{2\pi^2}{\Delta\omega^2 T} \cdot \frac{l}{f_A} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}^2(\nu \cdot l/f_A) \qquad (2.68)$$

Durch Überführung des Summenausdrucks in den Frequenzbereich (vergleiche Anhang A4) erhält man

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} < \frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega - \mu\frac{2\pi f_A}{l})\, d\omega \qquad (2.69)$$

Mit der Bedingung (2.65) gibt es höchstens ein

$$\mu = \mu_0 \approx \frac{l \cdot \omega_m}{\pi f_A} \quad ,$$

so daß der Summenausdruck in Gleichung (2.69) für $\mu \neq 0$ zum Integranden einen Beitrag liefert.
Es gilt also (vergleiche Bild 2.14)

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} < \frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}^2(\omega)\, d\omega +$$

$$+ \frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cdot \left\{ \Phi_{xx}(\omega - \mu_o \frac{2\pi f_A}{l}) + \Phi_{xx}(\omega + \mu_o \frac{2\pi f_A}{l}) \right\} d\omega$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\pi}{T\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}^2(\omega)\, d\omega \qquad (2.70)$$

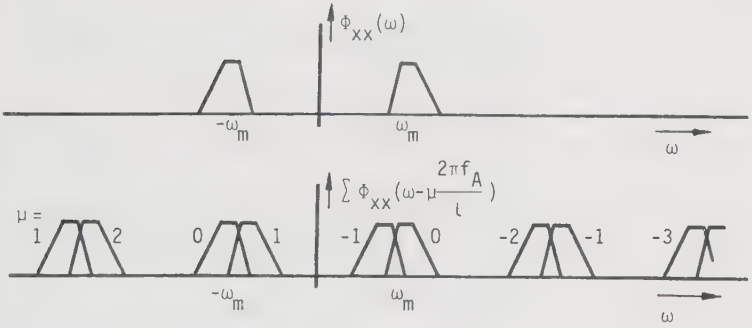


Bild 2.14 : Überfaltung des Bandpaßausgangssignals bei Unterabtastung

Für die Varianz des Schätzwertes ergibt sich für $2 \leq l \leq 200$ ein maximal doppelt so hoher Wert als im analogen Fall. Demzufolge ist die Meßzeit T nach Gleichung (2.30) entsprechend mit einem Faktor, der zwischen eins und zwei liegt, zu multiplizieren. Der genaue Wert dieses Faktors hängt nach Gleichung (2.70) vom Wert l und der aktuellen Meßfrequenz ω_m ab.

Eine Möglichkeit, einen Genauigkeitsverlust zu vermeiden, ist, für jede Meßfrequenz den Wert l so zu bestimmen, daß Vielfache der halben Abtastrate $\nu \cdot \frac{f_A}{2l}$ außerhalb der Sperrgrenzen des Bandpasses liegen. Diese Forderung ist in etwa gleich der Forderung , daß

$$\left| \sin \frac{l \cdot \omega_m}{f_A} \right| \approx 1 \qquad . \qquad (2.82)$$

ist.

Um die Richtigkeit der Gleichung (2.30) bei abgetastetem Signal (für $l = 1$) nachzuweisen, wurde die Verteilungsdichte des Schätzwertes der Leistungsdichte bei einer festen Mittenfrequenz gemessen. Die Bedingungen waren dabei:

$N = 2^{15}$ bzw. 2^{18}
$l = 1$
$f_A = 20$ kHz
$T = 1{,}6384$ sec bzw. $13{,}1072$ sec
$\Delta\omega = 2\pi 25$ Hz
$\omega_m = 2\pi 500$ Hz
$\varepsilon(\omega_m) = 0$, Signal mit weißem Spektrum am Eingang des Bandpasses

Daraus erhält man mit den Gleichungen (2.29), (2.30) und (2.67)

$$\frac{\varepsilon_\Phi}{v(S)} = \frac{\sigma_{\hat{\Phi}}}{\Phi} \lessapprox \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta\omega T_u}} = \frac{28{,}3}{\sqrt{N \cdot l}} = \qquad (2.83)$$

$$= 0{,}156 \quad \text{bzw.} \quad 0{,}0552$$

Bild 2.15 zeigt das Meßergebnis. Dabei fällt die Unsymmetrie auf, da es sich um eine χ^2-Verteilung handelt, die sich mit geringer werdender Streuung einer Gaußverteilung annähert.

Bei einer Gaußverteilung kann aus dem Maximum oder der Breite der Verteilung bei $e^{-0.5}$ des Maximums die Streuung ermittelt werden. Dies gilt in guter Näherung auch bei einer χ^2-Verteilung geringer Streuung. Aus Bild 2.15 erhält man die Werte

$$\frac{\sigma_{\hat{\Phi}}}{\Phi} \approx 0{,}151 \quad \text{bzw.} \quad 0{,}054 \ ,$$

d. h. eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten.

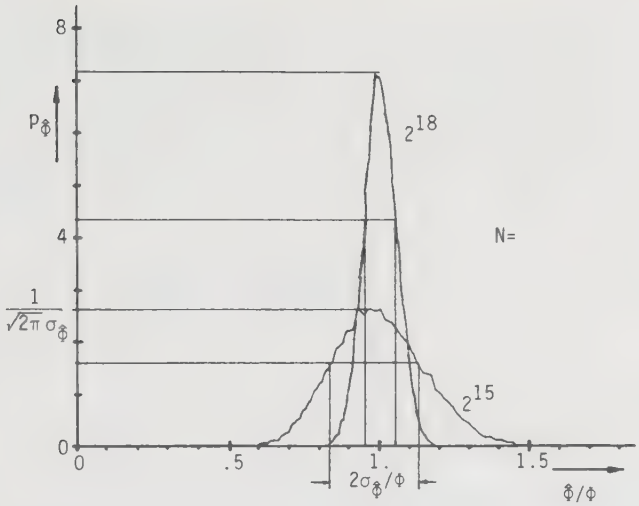


Bild 2.15: Gemessene Verteilungsdichten des Schätzwertes der Leistungsdichte bei l = 1

Für l = 195 und N = 2^{10} sind im Kapitel 4.1 weitere Kontrollmessungen aufgeführt.

2.3.4.3. Messung der komplexen Übertragungsfunktion

Die Messung der komplexen Übertragungsfunktion geschieht entsprechend der Gleichung (2.34 a,b), wobei wieder aufgrund der digitalen Verarbeitung die Integrale in Summen übergehen, also

$$\hat{P} = P + \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Delta_R((k-\nu\cdot l)/f_A)$$

$$\hat{I} = I + \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Delta_I((k-\nu\cdot l)/f_A) \qquad (2.71\ a,b)$$

Der aktuelle Zeitpunkt ist

$$k = f_A \cdot t$$

und der Abstand des abgetasteten Wertepaares ist

$$\lambda = f_A \cdot t_\Delta \quad .$$

Der Wert N wird nach Gleichung (2.67) bestimmt.

Eine Unterabtastung mit dem Faktor l ist hier - im Gegensatz zur Leistungsdichtemessung - zwingend notwendig, da aufgrund der hohen Abtastrate von 20 kHz eine Echtzeitverarbeitung mit dem MSP nicht mehr möglich ist und die abgetasteten Werte $x(t_o)$ und $x(t_o-t_\Delta)$ zwischengespeichert werden müssen.

Zur Genauigkeitsabschätzung wird ein der Gleichung (2.35) entsprechender Erwartungswert gebildet:

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} = E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Delta_R\left(\frac{k-\nu l}{f_A}\right)\right)^2\right\} \qquad (2.72\ a)$$

Nach einer längeren Zwischenrechnung, die im Anhang A 5 angegeben ist, ergibt sich ein der Gleichung (2.36) entsprechender Ausdruck, wobei $\Omega_m = \omega_m / f_A$ geschrieben wurde:

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} = \frac{1}{N a_1^2 \sin^2(\Omega_m \lambda)} \sum_{\eta=-N}^{N} \left(1 - \frac{|\eta|}{N}\right) \cdot \tilde{\varphi}_1\left(\frac{\iota\eta}{f_A}\right) +$$

$$+ \frac{\cos\Omega_m(2k - \iota(N-1) - \lambda)}{\sin(\Omega_m \iota) N^2 a_1^2 \sin^2(\Omega_m \lambda)}$$

$$\cdot \sum_{\eta=-N}^{N} \sin\Omega_m \left(N - |\eta|\right) \cdot \tilde{\varphi}_2\left(\frac{\iota}{f_A}\right) \qquad (2.73a)$$

Dabei sind $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ wie in Gleichung (2.36) definiert. Für den Ausdurck $\mathrm{Var}\{\hat{I}\}$ ergibt sich die gleiche Beziehung, wobei jedoch die zweite Summe negatives Vorzeichen besitzt. Da eine Varianz immer positiv ist, erhält man unmittelbar folgende Gleichung

$$\max\left(\mathrm{Var}\{\hat{R}\}, \mathrm{Var}\{\hat{I}\}\right) < \mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} =$$

$$= \frac{2}{N a_1^2 \sin^2(\Omega_m \lambda)} \sum_{\eta=-N}^{N} \left(1 - \frac{|\eta|}{N}\right) \tilde{\varphi}_1\left(\frac{\iota\eta}{f_A}\right) \qquad (2.74)$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$|\sin(\Omega_m \iota)| \cdot N >> 1 \qquad (2.75)$$

gilt, ist die zweite Summe in Gleichung (2.73) gegen die erste vernachlässigbar. Dies setzt außer einer großen Meßzeit $T = N \cdot \iota / f_A$ einen Wert ι voraus, so daß für alle Meßfrequenzen $\omega_m = \Omega_m \cdot f_A$ der Wert $\sin(\Omega_m \cdot \iota)$ deutlich von Null verschieden ist.
Dies ist im allgemeinen jedoch nicht vorauszusetzen.

Für große Meßzeiten vereinfacht sich Gleichung (2.74) :

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \approx \frac{2}{Na_1^2 \sin^2(\Omega_m \lambda)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N})\, \tilde{\varphi}_1(\frac{l\,n}{f_A})$$

$$= \frac{2}{Ta_1^2 \sin^2 \omega_m t_\Delta} \cdot \frac{l}{f_A} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1(\frac{l\,n}{f_A}) \qquad (2.76)$$

Nach Übergang in den Frequenzbereich und mit trigonometrischen Umformungen - siehe Anhang A 6 - erhält man

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \lessapprox \frac{4}{Ta_1^2 \sin^2 \omega_m t_\Delta} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega_m - \mu\frac{2\pi f_A}{l}) \cdot \sin^2(\omega_m - \mu\frac{\pi f_A}{l}) t_\Delta \qquad (2.77)$$

Mit der Bedingung (2.65) gibt es höchstens ein $\mu=\mu_o$ für das

$$\Phi_{xx}(\omega_m - \mu\frac{2\pi f_A}{l}) \neq 0$$

gilt (vergleiche Bild 2.14). Dazu muß gelten

$$\omega_{S1} < \mu_o \frac{2\pi f_A}{l} - \omega_m < \omega_{S2}$$

$$= \frac{\omega_{S1}+\omega_m}{2\pi f_A} \cdot l < \mu_o < \frac{\omega_{S2}+\omega_m}{2\pi f_A} \cdot l \qquad (2.78)$$

mit $\omega_{S1,2}$ = Sperrgrenzen des Bandpasses.

Damit erhält man

$$\mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \lessapprox$$

$$\lessapprox \frac{4}{Ta_1^2}\left[\Phi_{xx}(\omega_m)+\left(\frac{\sin(\omega_m-\mu_o\frac{\pi f_A}{l})t_\Delta}{\sin\omega_m t_\Delta}\right)^2\Phi_{xx}(\omega_m-\mu_o\frac{2\pi f_A}{l})\right] \qquad (2.79)$$

Aus Gleichung (2.78) folgt

$$\omega_m \approx \mu_o \frac{\pi f_A}{l} \quad ,$$

womit der zweite Term der Gleichung (2.79) vernachlässigbar wird, da die Verzögerung λ für jede Meßfrequenz vom Programm so bestimmt wird, daß

$$|\sin\Omega_m\lambda| = |\sin\omega_m t_o| \geq 0.92388 \qquad (2.80)$$

gilt.
Damit bestimmen sich die Varianzen letzlich zu

$$\max(\mathrm{Var}\{\hat{R}\}, \mathrm{Var}\{\hat{I}\}) \leq \mathrm{Var}\{\hat{R}\} + \mathrm{Var}\{\hat{I}\} \leq \frac{4}{Ta_1^2}\Phi_{xx}(\omega_m) \qquad (2.81)$$

Im Vergleich mit Gleichung (2.39) erkennt man, daß für $2 \leq l \leq 200$ die Varianz des Schätzwertes für den Realteil o d e r den Imaginärteil bis doppelt so groß sein kann. Demzufolge ist die Meßzeit nach Gleichung (2.43) mit einem Faktor zwischen eins und zwei zu multiplizieren, es sei denn, man bestimmt l vom Programm her so, daß Gleichung (2.75) erfüllt ist, also

$$|\sin(\Omega_m l)| \approx 1 \qquad (2.82)$$

gilt. (Vergleiche Kaptiel 2.3.4.2.)

Zur Kontrolle der Gleichung (2.81) wurde die komplexe Übertragungsfunktion eines linearen Deltamodulationssystems /50/ gemessen. Die Taktfrequenz betrug 150 kHz, das Testsignal war weißes auf 3,4 kHz bandbegrenztes gaußsches Rauschen. Die Aussteuerung S war 6, 10 und 16 dB unter der optimalen Aussteuerung S_{opt}, damit kein Einfluß durch Steigungsüberlastung auf die Übertragungsfunktion erfolgte. Erwartet wurde als Übertragungsverhalten aufgrund des Aufbaus des Deltamodulators eine konstante Verstärkung $|H|$ und Laufzeit τ.

Die Meßparameter waren

$$\left.\begin{aligned} N &= 512 \\ l &= 195 \\ f_A &= 20\ \text{kHz} \end{aligned}\right\} \quad T = 4{,}992\ \text{sec}$$

$$f_m = n \cdot 250\ \text{Hz} \ ; \quad n = 1 \ldots 32$$

$$a_1^2 = 5\ \text{kHz} \cdot \hat{\Phi}$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (2.81) eine maximale Streuung des Real- bzw. Imaginärteils der Übertragungsfunktion von

$$\sigma_H = \frac{\varepsilon_H}{v(S)} \leq \frac{2}{a_1}\sqrt{\frac{\Phi_{xx}}{T}} \approx 0{,}01266 \qquad (2.84)$$

Aus den Meßwerten für Betrag und Phase der Übertragungsfunktion wurden zunächst durch Mittelung bzw. linearer Regression (Taschenrechner hp 11C) die Schätzwerte $|\hat{H}|$ bzw. $\hat{\tau}$ ermittelt. Danach wurden damit die Standardabweichungen $s_\bullet$ der Meßwerte von Real- und Imaginärteil berechnet.

S/S_{opt}	-6 dB	-10 dB	-16 dB
$\lvert\hat{H}\rvert$	0,9412	0,9355	0,9346
$\hat{\tau}/\mu s$	7,135	7,142	6,573
$s_{\hat{R}}$	0,00955	0,00833	0,01039
$s_{\hat{I}}$	0,01145	0,1153	0,01062

Man erkennt, daß die gemessenen Standardabweichungen kleiner als der theoretische Maximalwert sind.

Bild 2.16 zeigt die Meßwerte der Übertragungsfunktion für $S/S_{opt} \hat{=}$ -10 dB als Ortskurve.

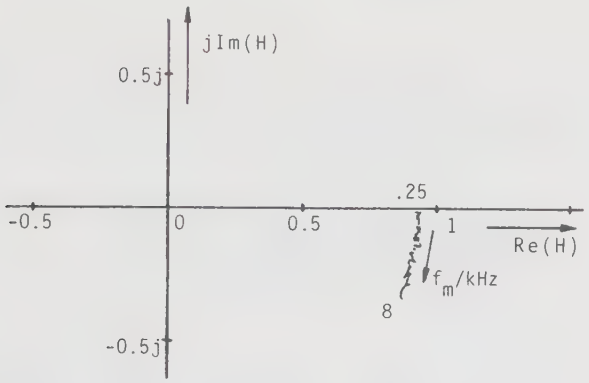


Bild 2.16: Gemessene Ortskurve der Übertragungsfunktion bei LDM, f_T = 150 kHz, $S/S_{opt} \hat{=}$ -10 dB

2.3.5. Technische Daten

Die Daten für den Meßaufbau sind in der Tabelle 2.2. zusammengefaßt, sie beziehen sich auf eine Abtastfrequenz f_A = 20 kHz.

mögliche Meßfrequenzen	30 Hz ... 8 kHz
Meßfrequenzen bei max. Dynamik	250 Hz ... 8 kHz
minimale Frequenzschrittweite	0,305 Hz
maximale Anzahl der Frequenzpunkte	512
Bandbreite des Testsignals	≤ 8 kHz
Dynamik der Leistungsdichtemessung (maximal meßbarer Wert/Eigenrauschen)	80dB
Genauigkeit der Leistungsdichtemessung	
systematischer Fehler	< 0,5 dB
statistischer Fehler	durch einstellbare Meßzeit wählbar (s.u.)
Dynamik der Frequenzgangmessung	90 dB
Bereich von $\|H(j\omega)\|$	$0{,}0006 \leq \|H\| \leq 2.$
Genauigkeit der Frequenzgangmessung	
systematischer Fehler	keiner
statistischer Fehler	durch einstellbare Meßzeit und Amplitude wählbar (s.u.)
Einschwingzeit des Meßaufbaues (Bandpaß)	< 1 sec
Daten für die Messung (Kapitel 2.2)	
$\Delta\omega$ (Gleichung (2.9))	$2\pi 25$ Hz
T_Φ (Gleichung (2.23))	≈ 0,02 sec

Tabelle 2.2

a) Statistischer Fehler der Leistungsdichtemessung

Nach den Gleichungen (2.20), (2.30) und (2.70) sowie der Realisierung des Bandpasses hängt die Meßdauer T vom statistischen Fehler ε_Φ des Meßwertes gemäß

$$T \cdot 20\ \text{kHz} = N_\Phi \cdot l = a_\Phi \left(\frac{v(S)}{\varepsilon_\Phi} \right)^2 \qquad (2.85)$$

ab. Dabei ist

N_Φ Anzahl der verrechneten Abtastwerte (eingebbar)
l Unterabtastrate (eingebbar)
$a_\Phi \approx 800$ für $l = 1$
$800 \lessapprox a_\Phi \lessapprox 1600$ " $2 \leq l \leq 200$
S statistische Sicherheit des Meßwertes
$v(S) = \sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}(S)$ (2.28)

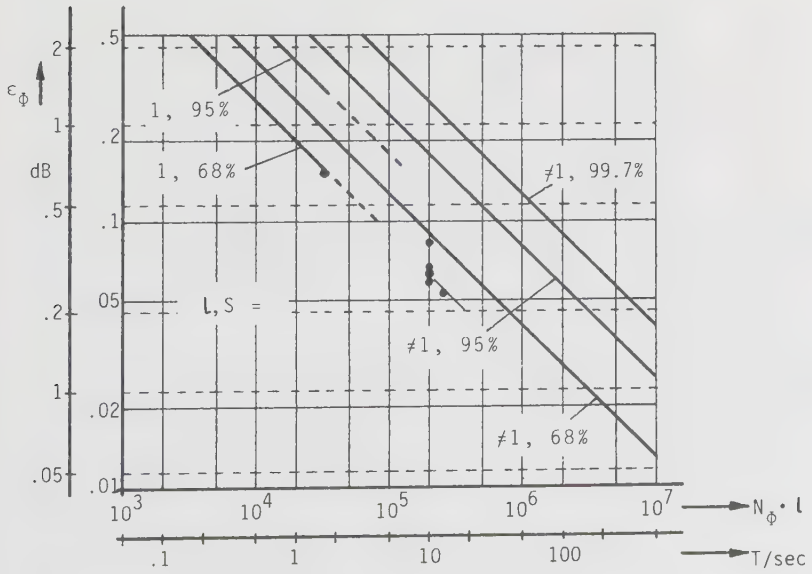


Bild 2.17: Diagramm der Gleichung (2.85)
— Rechnung, • Messung

Der Zusammenhang (2.85) ist für verschiedene Parameter S und ℓ in Bild 2.17 dargestellt. Eingetragen sind auch die in den Kapiteln 2.3.4.2 und 4.1 durchgeführten Kontrollmessungen

Die praktische Wahl von N_Φ und ℓ (und damit T) ist nach unten von der erreichbaren Genauigkeit beschränkt (sinnvoll: $\ell = 1$ für $T \leq 1{,}6$ sec) und nach oben hin von der internen Zahlendarstellung ($N_\Phi < 2^{15}$; $\ell = 200 \Rightarrow T \leq 5{,}46$ min).

In Bild 2.18 ist die Beziehung (2.28) halblogarithmisch dargestellt. (vergl. auch Tabelle 2 1)

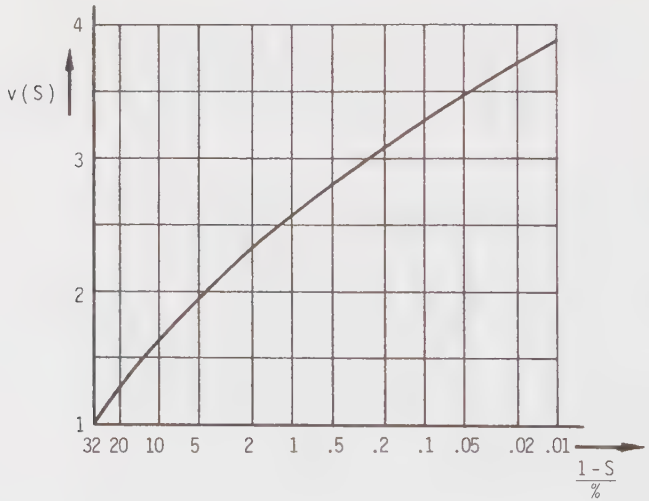


Bild 2.18: Darstellung von Gl. (2.28), $v(S) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{erf}^{-1}(S)$

b) Statistischer Fehler der Frequenzgangmessung

Nach den Gleichungen (2.40), (2.43) und (2.81) hängt die Meßdauer T vom statistischen Fehler ε_H gemäß

$$T \cdot 20\ \text{kHz} = N_H \cdot l \approx (2...4) \cdot 20\ \text{kHz} \cdot \Phi_{nn}(\omega_m) \cdot \left[\frac{v(S)}{a_1 \varepsilon_H}\right]^2 \qquad (2.86)$$

ab.

Vom Programm wird bei jeder Mittenfrequenz ω_m die Leistung des Sinussignals automatisch proportional zur gemessenen Leistungsdichte gewählt, um gleichbleibende Genauigkeit mit möglichst geringen Sinusamplituden zu erhalten. Dabei kann der Proportionalitätsfaktor v_H eingegeben werden:

$$a_1 = v_H \cdot \sqrt{312{,}5\ \text{Hz} \cdot \Phi_{nn}} \qquad (2\ 87)$$

Damit erhält man

$$T \cdot 20\ \text{kHz} = N_H \cdot l = a_H \left(\frac{v(S)}{v_H \varepsilon_H}\right)^2 \qquad (2.88)$$

mit N_H Anzahl der verrechneten Abtastwerte (eingebbar)

$a_H \approx 128$ für $l = 1$

$128 \lessapprox a_H \lessapprox 256$ für $2 \leq l \leq 200$

Dieser Zusammenhang ist für verschiedene Parameter S und l in Bild 2.19 dargestellt. Eingetragen ist die Kontrollmessung aus Kapitel 2.3.4.3

Die praktische Wahl der Meßparameter sollte so erfolgen, daß v_H und damit a_1 minimal ist (vergl. Kapitel 2.2.1), d. h. $l = 1$, $v_H = 0{,}2$ und $N_H \leq 512$. Mit steigender Genauigkeit ist dann l bis ca. 200 zu erhöhen und danach v_H bis $v_{H,max}$.

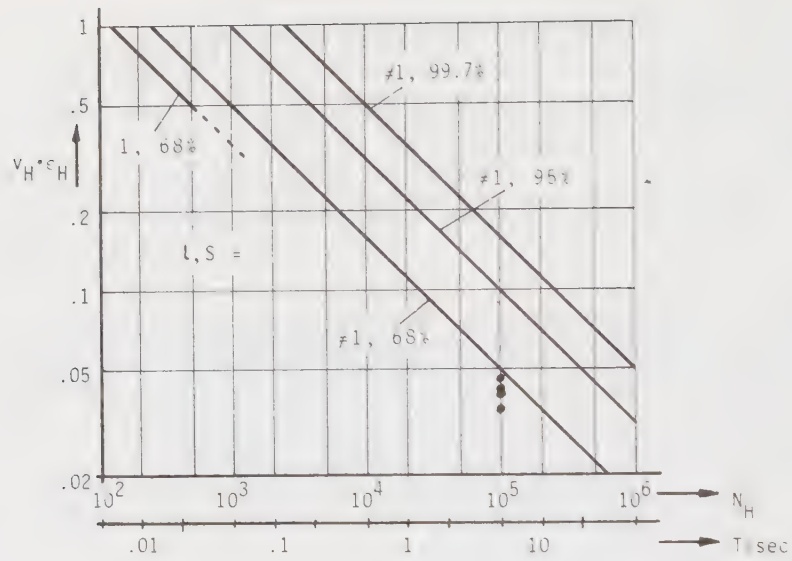


Bild 2.19: Diagramm der Gleichung (2.88)
—— Rechnung, • Messung

Der Wert für $v_{H,max}$ läßt sich wie folgt abschätzen:

Nimmt man das Störsignal als ein auf die Bandbreite $2\pi B$ begrenztes weißes Geräusch an (B ≙ äquiv. Bandbreite), so wird mit Gleichung (2.87) und dem zu messenden Signalrauschabstand

$$v_{H,max}^2 = k \cdot \frac{S}{N} \cdot \frac{12,8 \cdot B}{kHz} \qquad (2.89)$$

Dabei ist

$$k = \frac{a_1^2}{2 \cdot S}$$

das Verhältnis der Leistungen des Sinussignals und des Nutzsignals, das man als maximal zulässig vorgibt.

3. MESS-SIGNALE

Das verallgemeinerte Rauschklirrmeßverfahren bietet den Vorteil, die linearen und nichtlinearen Verzerrungen eines Systems für ein b e l i e b i g e s Meßsignal zu ermitteln. Um die Aussagekraft und Genauigkeit der Meßergebnisse in Abhängigkeit vom gewählten Signal einschätzen zu können, werden im folgenden verschiedene Signalarten diskutiert und eine spezielle Erzeugungsart näher untersucht.

3.1 Natürliche Signale

Unter natürlichen Signalen seien diejenigen verstanden, die beim praktischen Einsatz des Meßobjekts anliegen. Dabei kann es sich z. B. um ein Sprachsignal bei einer PCM-Übertragungsstrecke handeln oder um ein Musiksignal bei einer magnetischen Tonaufzeichnung, usw. Betrachtet man derartige Signale näher, erkennt man im allgemeinen eine Zeitabhängigkeit von Leistungspegel, spektraler Zusammensetzung, Pausendauer, etc. Das bedeutet, die meisten natürlichen Signale sind nicht stationär. Selbst über große Zeiten - Minuten, Stunden - gemittelte Signaleigenschaften können starke Unterschiede aufweisen, wie z. B. bei einer Frauenstimme im Vergleich zu einer Männerstimme oder Unterhaltungsmusik im Vergleich zu ernster Musik. Damit ist die Aussagekraft einer bestimmten Messung in Frage gestellt, da eine andere Messung (mit z. B. einer anderen Stimme) Ergebnisse liefert, die wesentlich verschieden sein können.

Um diese Schwierigkeit in den Griff zu bekommen, könnte man sich zwei Möglichkeiten vorstellen :

1) Man schränkt die Signalvielfalt ein (z. B. nur Frauenstimmen) und mittelt über lange Zeit und über eine Vielzahl von Vertretern der eingeschränkten Signalklasse.
Bei Wiederholung dieses Vorgangs für die verschiedenen möglichen Signalklassen erhält man einen Katalog von Meßergebnissen (z. B. für männliche und weibliche Stimmen, verschiedene Stimmlagen, usw.).
Darin läßt sich für ein aktuelles Signal ein Meßergebnis finden, das mit vertretbarer Abweichung gültig ist.
Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der umfassenden Charakterisierung des Meßobjekts, der Nachteil jedoch offensichtlich in der durch die Vielfalt und die Mittelung bedingten sehr hohen Meßzeiten, sowie im Umfang und der Unübersichtlichkeit der Ergebnisse.

2) Um bei kurzem Zeitaufwand vergleichbare Meßergebnisse zu erhalten, kann man sich auf einen kurzen typischen Signalabschnitt beschränken, den man dann für alle Messungen immer wieder verwendet. Damit eine Vergleichbarkeit von Ergebnissen möglich wird, könnten Testsignalabschnitte eingeführt werden, die international verfügbar und verbindlich sind, wie es z. B. in der zweidimenionalen Signalverarbeitung einige Testbilder gibt, die häufig Verwendung finden.
Der Vorteil liegt in sehr kurzen Meßzeiten, da keine Mittelungen nötig sind. Nachteilig wirkt sich aus, daß die Meßergebnisse nicht für beliebige Signale gelten, was auch der Nachteil bei den bisher üblichen Messungen mit Sinussignal oder gaußschen Rauschen ist.

Zusammenfassend muß man also feststellen, daß die Möglichkeit, mit einem natürlichen Signal messen zu können, vorteilhaft ist, wenn die linearen und nichtlinearen Verzerrungen für ein spezielles Signal bzw. Signalabschnitt ermittelt werden sollen. Andererseits besitzt eine solche Messung unter Umständen eine geringe a l l g e m e i n e Aussagekraft.

3.2. Modellsignal mit vorgebbarer Amplitudenverteilung und Autokorrelationsfunktion

Unter künstlichen Signalen seien diejenigen verstanden, die künstlich generiert für Test- und Meßzwecke eingesetzt werden. Dabei kann es sich um Signale handeln, die mit den entsprechenden natürlichen Signalen praktisch nichts gemein haben (z. B. Sinussignal anstelle eines Sprachsignals), oder aber um Modellsignale, die einige statistische Eigenschaften des natürlichen Signals approximieren.
Die Reproduzierbarkeit einer Messung ist durch die Verwendung künstlicher Signale gesichert, da sich diese durch Angabe der statistischen Parameter oder der Erzeugungsform immer eindeutig definieren lassen. Weiterhin wird die Aussagekraft einer Messung umso stärker, je besser das natürliche Signal modelliert wird.

Zur Modellierung eines bestimmten Signals sind entsprechende Vorschläge in der Literatur bekannt, wie z. B. /11/ und /19/ für ein Sprachsignal. Ein Modellsignalgenerator, der es erlaubt, verschiedene Signalarten zu approximieren, wird dies bei vertretbarem Aufwand nur für wenige statistische Parameter können. Ein entsprechender Vorschlag sei im folgenden vorgestellt.

Brehm schlägt in /20/ ein Verfahren vor, bei dem ein stochastisches Signal mit unabhängig voneinander vorgebbarer Amplitudenverteilung und Autokorrelationsfunktion generiert wird. Anhand des Bildes 3.1 wird dieses Verfahren erläutert.

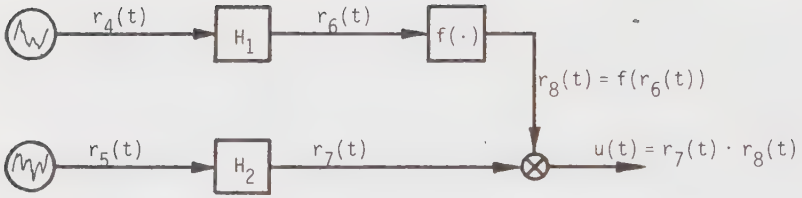


Bild 3.1 : Blockschaltbild des Modellsignalgenerators

Zwei Quellen liefern statistisch unabhängige stationäre mittelwertfreie gaußverteilte Signale r_4 und r_5. Nach einer linearen Filterung mit den Systemen H_1 und H_2 besitzen die beiden gaußverteilten Signale r_6 und r_7 Autokorrelationsfunktionen, mit denen sich die gewünschte AKF des Produktsignals u ergibt. Mit einer nichtlinearen Kennlinie f wird die Amplitudenverteilung des Signals r_8 so geformt, daß das Produktsignal u die gewünschte Verteilungsdichte besitzt.

Im allgemeinen Fall läßt sich die Verteilungsdichte $p_u(v)$ des Produktsignals u durch (numerisches) Lösen des Integrals

$$P_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|r|}\, p_8(r) p_7\left(\frac{v}{r}\right) dr \qquad (3.1)$$

aus den Verteilungsdichten der Faktoren berechnen.

Durch Einbeziehen der nichtlinearen Kennlinie $f(r_6)$ und der Verteilungsdichten $p_{6,7}$ der gaußverteilten Signale r_6 und r_7

$$p_{6,7}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{6,7}} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_{6,7}^2} \right) \tag{3.2}$$

erhält man mit

$$g(r_8) = r_6 \Leftrightarrow r_8 = f(r_6)$$

$$f \text{ streng monoton} \tag{3.3}$$

$$p_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|r|} p_6(g(r)) \cdot \left|\frac{dg}{dr}\right| p_7\left(\frac{v}{r}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_6\sigma_7} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{dg}{dr}\right| \exp\left(-\frac{g^2(r)}{2\sigma_6^2} - \frac{v^2}{2\sigma_7^2 r^2}\right) \frac{dr}{r} \tag{3.4}$$

Der umgekehrte Weg, der eigentlich interessiert, nämlich ausgehend von der gewünschten Dichte $p_u(v)$ die Verteilungsdichte $p_8(r)$ des Signals r_8 und damit die Kennlinie f zu berechnen, ist nicht eindeutig gangbar.

Da das Signal $r_7(t)$ mittelwertfrei und gaußverteilt ist, d. h. weil

$$p_7(r) = p_7(-r) \tag{3.5}$$

gilt, ergibt sich für alle Verteilungsdichten $p_8(r)$, für die

$$p_8(r) + p_8(-r) = \tilde{p}_8(r) \quad , r > 0 \tag{3.6}$$

gilt, dieselbe Verteilung des Produktsignals. Der Nachweis erfolgt durch Einsetzen der Gleichung (3.6) in Gleichung (3.1) :

$$p_u(v) = \int_{-\infty}^{0} \frac{-1}{r}\, p_8(r) p_7(\frac{v}{r})dr + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{r}\, p_8(r) p_7(\frac{v}{r})dr =$$

$$= \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{r}\, p_8(-r) p_7(\frac{-v}{r})(-dr) + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{r}\, p_8(r) p_7(\frac{v}{r})dr =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{r}\, \tilde{p}_8(r) p_7(\frac{v}{r})dr \qquad (3.7)$$

Eine Umkehrung der Beziehung (3.7) zur Berechnung der Verteilungsdichte $p_8(r)$ ist nicht allgemein möglich. Für eine bestimmte Klasse von Verteilungsdichten jedoch, die sich durch Meijersche G-Funktionen beschreiben lassen /21/, ist die Verteilungsdichte $p_8(r)$ zumindest formal angebbar.

Tabelle 3.1 gibt den Zusammenhang zwischen einigen Verteilungsdichten $p_8(r)$ und $p_u(v)$ wieder, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen wurde, daß die Leistungen der Signale r_7 und r_8 gleich Eins sind.

$p_8(r)$	$p_u(v)$
Gauß : $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$	K_0 : $\frac{1}{\pi} K_0(\lvert v\rvert)$
Rayleigh : $r \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$	Laplace : $\frac{1}{2} \exp(-\lvert v\rvert)$
Maxwell : $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^2 \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$	K_1 : $\frac{1}{\pi} \cdot \lvert v\rvert \cdot K_1(\lvert v\rvert)$

Tabelle 3.1 : Zusammengehörige Verteilungen der Signale u und r_8

Nach einer frei wählbaren Aufteilung der Verteilungsdichte $p_8(r)$ gemäß Gleichung (3.6) läßt sich dann eine steng monotone Funktion f ermitteln, die die Gaußverteilung des Signal r_6 in die gewählte Verteilung des Signals r_8 transformiert. Es muß gelten:

$$P_8(f(r_6)) = P_6(r_6)$$

$$= \int_{-\infty}^{r_6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_6} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_1^2}\right) dr$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{r_6}{\sqrt{2}\sigma_6}\right) \qquad (3.8)$$

Mit der Umkehrfunktion P_8^{-1} der Verteilungsfunktion $P_8(r)$ erhält man dann

$$f(r_6) = P_8^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{r_6}{\sqrt{2}\sigma_6}\right)\right) \qquad (3.9)$$

Zu beachten ist, daß außer dieser streng monotonen Lösung für die nichtlineare Kennlinie noch weitere (unendlich viele) Lösungen existieren, die dann nicht monoton sind.

Die AKF $\varphi_{uu}(\tau)$ des Produktsignals u ist gleich dem Produkt der Autokorrelationsfunktionen der Signale r_7 und r_8, da die beiden Signale voneinander statistisch unabhängig sind /5/.

$$\varphi_{uu}(\tau) = \varphi_{88}(\tau) \cdot \varphi_{77}(\tau) \qquad (3.10)$$

Die AKF $\varphi_{88}(\tau)$ wiederum läßt sich als Potenzreihe der AKF $\varphi_{66}(\tau)$ berechnen, da das Signal r_6 stationär und gaußverteilt ist /22/.

$$\varphi_{88}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{\varphi_{66}(\tau)}{\sigma_6^2} \right)^n \tag{3.11}$$

Dabei sind die Koeffizienten c_n proportional zu den Entwicklungskoeffizienten der Kennlinie f bei Reihenentwicklung nach den orthogonalen Hermitschen Polynomen. Sie berechnen sich zu

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_6 r) H_n(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \tag{3.12}$$

Die Funktion $H_n(r)$ ist das Hermitsche Polynom n-ten Grades (siehe z. B. /6/).

$$H_n(r) = \sqrt{n!} \cdot \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^\nu r^{n-2\nu}}{\nu! 2^\nu (n-2\nu)!} \tag{3.13}$$

Der umgekehrte Rechenweg, nämlich die Bestimmung der AKF $\varphi_{66}(\tau)$ aus der gewünschten AKF $\varphi_{uu}(\tau)$ des Produktsignals und der vorgebbaren AKF $\varphi_{77}(\tau)$, ist nur dann eindeutig gangbar, wenn der Zusammenhang nach Gleichung (3.11) eineindeutig ist. Für diesen Fall läßt sich die AKF $\varphi_{66}(\tau)$ mit der Bürmann-Lagrangeschen Formel /23/ geschlossen angeben:

$$\varphi_{66}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (\varphi_{88}(\tau) - c_o^2)^\nu \tag{3.14}$$

mit

$$\begin{aligned} b_\nu &= \frac{1}{\nu!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{d\varphi_{66}^{\nu-1}} \left\{ \left(\frac{\varphi_{66}}{\varphi_{88}-c_o^2} \right)^\nu \right\} \right]_{\varphi_{66}=0} \\ &= \frac{1}{\nu!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{d\varphi_{66}^{\nu-1}} \left\{ \left(\sum_{n-1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\sigma_6^{2n}} \varphi_{66}^{n-1} \right)^{-\nu} \right\} \right]_{\varphi_{66}=0} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dieser geschlossene Ausdruck für die Koeffizienten b_ν hat den Nachteil, daß er sich für große ν schwer berechnen läßt. Für eine numerische Auswertung ist es einfacher, die Gleiung (3.11) in die rechte Seite der Gleichung (3.14) einzusetzen und durch Koeffizientenvergleich die b_ν rekursiv zu ermitteln. (Siehe auch /23/).

Besitzen die beiden Quellensignale r_4 und r_5 ein weißes Spektrum, so läßt sich danach aus den Autokorrelationsfunktionen $\varphi_{66}(\tau)$ und $\varphi_{77}(\tau)$ der Betragsfrequenzgang der beiden linearen Systeme H_1 und H_2 berechnen und durch entsprechende Filter exakt oder näherungsweise realisieren. (Z. B. mit /24/)

Einen für die praktische Realisierung interessanten Sonderfall erhält man, wenn das lineare System H_1 ein schmaler Tiefpaß ist /11/, /20/. Dadurch fällt die AKF $\varphi_{66}(\tau)$ nur langsam mit τ und hat damit bei entsprechender Dimensionierung, d. h. solange die AKF $\varphi_{77}(\tau)$ wesentlich von null verschieden ist, fast den Wert $\varphi_{66}(0)$. (Vergleiche Bild 3.2).

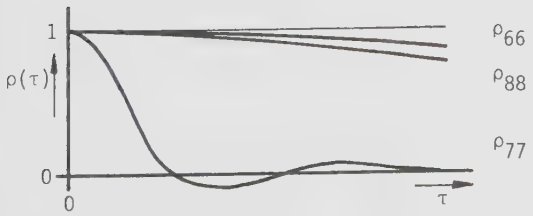


Bild 3.2 : Qualitativer Verlauf der Autokorrelationsfunktionen der Signale r_6, r_7 und r_8

Nach Gleichung (3.11) besitzt dann auch die AKF $\varphi_{88}(\tau)$ fast ihren Maximalwert $\varphi_{88}(0)$ - vor allen dann, wenn die Koeffizienten c_n, $n > 1$ aufgrund einer monotonen Kennlinie f klein sind - sodaß mit der Gleichung (3.10) die AKF $\varphi_{uu}(\tau)$ des Produktsignals näherungsweise proportional zu $\varphi_{77}(\tau)$ ist, also folgende Beziehung gilt

$$\varphi_{uu}(\tau) \approx \varphi_{77}(\tau) \cdot E\{r_8^2(t)\} \qquad (3.16)$$

Wie gezeigt wurde, liefert der vorgestellte Modellsignalgenerator ein stochastisches Signal mit einer beliebig vorgebbaren AKF und einer Verteilung, die in der Vorgabe nur dadurch eingeschränkt ist, daß sie sich aus einer gaußschen Verteilung gemäß Gleichung (3.1) ergeben muß.

Auf die Zeitabhänigkeit hat man insofern einen Einfluß, als gemäß Gleichung (3.10) die AKF des Signals r_7 und damit das Frequenzverhalten des linearen Systems H_2 in gewissen Bereichen frei wählbar ist.

Für einen Aufbau dieses Modellsignalgenerators als Quelle für den erstellten Meßaufbau für schwach nichtlineare Systeme erscheint es sinnvoll, die Funktionsblöcke digital zu realisieren. Die linearen Systeme H_1 und H_2 sowie die nichtlineare Kennlinie f lassen sich dann von einem Programm gesteuert einstellen, was vor allem Vorteile bezüglich der Genauigkeit und der Langzeitstabilität der Anordnung mit sich bringt. Dazu werden dann digitale gaußsche Quellensignale r_4 und r_5 benötigt, deren Erzeugungen bei vertretbarer Güte der Gaußverteilung einen gewissen Aufwand erfordert. Im folgenden werden deshalb diesbezügliche Untersuchungen vorgestellt, die für einen Spezialfall zum Teil in /25/ zu finden sind.

3.2.1 Digitale Erzeugung einer gaußverteilten Zufallsfolge mit weißen Spektrum

Im Gegensatz zur Analogtechnik, wo viele Rauschquellen bereits gaußverteilte Zufallsgrößen mit weißem Leistungsdichtespektrum erzeugen (z. B. Widerstandsrauschen), liefern einfache Algorithmen in der Digitaltechnik (näherungsweise) gleichverteilte Zufallszahlen, die dann mit geeigneten Verfahren in (näherungsweise) gaußverteilte Zufallszahlen ohne Veränderung des weißen Spektrums umgeformt werden müssen /25/ - /28/ .
Zunächst werden für eine mit einem bekannten Verfahren erzeugte gleichverteilte Pseudozufallsfolge geschlossene Ausdrücke für die AKF und das Leistungsdichtespektrum hergeleitet.

3.2.1.1 Erzeugung einer gleichverteilten weißen Pseudozufallsfolge

Häufig werden gleichverteilte Zufallszahlenfolgen mit nichtlinearen Methoden erzeugt, z. B. mit dem multiplikativen Kongruenz-Algorithmus an Digitalrechnern / 29 /. Diese haben zwar den Vorteil der einfachen Realisierbarkeit, aber die statistischen Kenngrößen lassen sich nur meßtechnisch bestimmen. Dabei sind bei Schieberegisterfolgen aufgrund der linearen Erzeugung - linear bezüglich Moduloaddition - diese Kenngrößen einfach berechenbar /30/. Im folgenden wird eine mit einer üblichen Struktur erzeugte Pseudozufallszahlenfolge näher untersucht.

Ein rückgekoppeltes Schieberegister der Länge m erzeugt eine pseudozufällige 0-1-Folge $r_1(k)$ mit der Periodendauer $T = N \cdot T_0 = (2^m-1) \cdot T_0$, T_0 = Taktdauer. Es werden nun $w \leq m$

jeweils um eine Taktdauer T_0 verzögerte Bits der Folge als Dualstellen der Wertigkeit 2^0 bis 2^{1-w} einer Zweierkomplementzahl $r_2(k)$ aufgefaßt, so daß $-1 \leq r_2(k) < 1$ gilt.

Die Erzeugung der Zahlenfolge $r_2(k)$ aus der Binärfolge $r_1(k)$ läßt sich als nichtrekursive Filterung auffassen, so daß sich die Darstellung von Bild 3.3 ergibt. Eine anschließende Unterabtastung um den Faktor L liefert die benötigte Zahlenfolge $r_3(k)$.

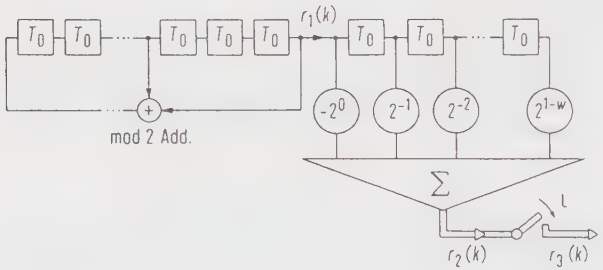


Bild 3.3 : Anordnung zur Erzeugung einer pseudozufälligen Zweierkomplementzahlenfolge

a) Verteilungsdichtefunktion der Pseudozufallszahlenfolge

Ist zu einem (Start-) Zeitpunkt mindestens ein Bit des Schieberegisters gleich eins, so nimmt das rückgekoppelte Schieberegister während einer Periode alle möglichen 0-1-Zustände an mit Ausnahme des Zustands 0,0,....0 /30/. Jeder auftretende Zustand hat daher die Wahrscheinlichkeit 1/N. Entsprechend der um m-w Bit kürzeren Länge der Zweierkomplementzahl r_2 gilt für die Häufigkeit $p_{2,\nu}$ eines bestimmten Zahlenwertes $r_2 = \nu \cdot 2^{1-w}$:

$$p_{2,\nu} = W\{ r_2(k) = \nu \cdot 2^{1-w} \} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{m-w}}{N} - 1 & \text{für } \nu = 0 \\ \frac{2^{m-w}}{N} & \text{für } \nu \in \{ -2^{w-1}, \ldots, -1, 1, \ldots, 2^{w-1} \} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (3.17)$$

Die um 1/N geringere Häufigkeit des Zahlenwertes $r_2 = 0$ ergibt sich aus dem Nichtauftreten des Schieberegisterzustandes 0,0,...,0, was praktisch keine Rolle spielt, da dieser Unterschied durch Wahl eines hinreichend großen Wertes m-w beliebig klein gehalten werden kann.

Die Unterabtastung der Folge $r_2(k)$ verändert die Häufigkeitsverteilung nicht, falls die Periode N und die Unterabtastrate l teilerfrei sind. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß eine entsprechend unterabgetastete (binäre) PN-Folge wieder eine PN-Folge ist /30/.

Bild 3.4 zeigt für das Beispiel m = 5, w = 4 das Histogramm der Verteilungsdichte von $r_3(k)$.

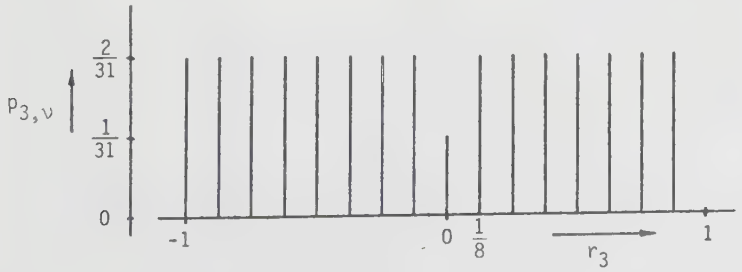


Bild 3.4 : Histogramm der Verteilungsdichte von $r_3(k)$ für m = 5, w = 4

Der Gleichanteil der Folge $r_3(k)$ berechnet sich zu

$$\mu_3 = \sum_{\nu=-2^{w-1}}^{2^{w-1}-1} p_{3,\nu} r_3(k_\nu) = \frac{2^{m-w}}{N} \cdot \sum_{\nu=-2^{w-1}}^{2^{w-1}-1} \nu \cdot 2^{1-w}$$

$$= -\frac{2^{m-w}}{2^m-1} = -2^{-w} \cdot \frac{N+1}{N} \qquad (3.18)$$

b) Autokorrelationsfolge (AKF) der Pseudozufallszahlenfolge

Die AKF der binären PN-Folge $r_1(k)$ ist nach /30/ gegeben durch

$$\varphi_{11}(\varkappa) = \frac{N+1}{4N} \left[1 + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \gamma_0(\varkappa + \nu N)\right] \qquad (3.19)$$

wobei $\gamma_0(k)$ den diskreten Einheitsimpuls darstellt /10/
$\gamma_0(0) = 1$, $\gamma_0(k \neq 0) = 0$.

Die Erzeugung der Zahlenfolge $r_2(k)$ aus der Binärfolge $r_1(k)$ läßt sich als nichtrekursive Filterung auffassen (vergleiche Bild 3.3), wobei die Impulsantwort

$$h_0(k) = -2\gamma_0(k) + 2^{-k} \left[\gamma_{-1}(k) - \gamma_{-1}(k-w)\right] \qquad (3.20)$$

ist. ($\gamma_{-1}(k)$ ist der diskrete Einheitssprung.)

Die AKF der Folge $r_2(k)$ ergibt sich denn als Faltung von $\varphi_{11}(\varkappa)$ mit der AKF $\varphi_{00}(\varkappa)$ der Impulsantwort. Es ist

$$\varphi_{00}(\varkappa) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_0(k)\cdot h_0(k+\varkappa)$$

$$= \sum_{k=0}^{w-1-|\varkappa|} [-2\gamma_0(k) + 2^{-k}] \cdot [-2\gamma_0(|\varkappa|+k) + 2^{-|\varkappa|-k}]$$

$$= \begin{cases} 2\gamma_0(\varkappa) - \frac{1}{3}(2^{1-|\varkappa|} + 2^{2+|\varkappa|-2w}) & \text{für } |\varkappa| < w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (3.21)$$

Speziell ist $\varphi_{00}(0) = \frac{4}{3}(1-4^{-w})$. (3.22)

Damit bestimmt sich $\varphi_{22}(\varkappa)$ zu

$$\varphi_{22}(\varkappa) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(k)\cdot\varphi_{11}(\varkappa-k)$$

$$= \frac{N+1}{4N}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(k)\gamma_0(\varkappa-k+\nu N)\right]$$

$$= \frac{N+1}{4N}\left[4^{1-w} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(\varkappa+\nu N)\right] , \qquad (3.23)$$

wobei

$$\varphi_{22}(0) = \frac{N+1}{3N}[1 + 2\cdot 4^{-w}] \text{ ist.} \qquad (3.24)$$

Bild 3.5 zeigt für das Beispiel m = 5, w = 4 die AKF von $r_2(k)$. Man erkennt, daß aufeinanderfolgende Werte von $r_2(k)$ noch stark korreliert sind, d. h. das Spektrum ist keineswegs "weiß".

Bild 3.5 : AKF von $r_2(k)$ für m = 5, w = 4

Durch Unterabtastung der Folge $r_2(k)$ wird die Korrelation aufeinanderfolgender Werte vermindert. Dabei darf die Rate der Unterabtastung l und die Periode N keinen gemeinsamen Teiler beitzen, da sonst die Eigenschaften der PN-Folge verloren gehen /30/. Weiterhin erhält man nur dann eine sinnvolle Dekorrelation aufeinderfolgender Werte, wenn $l \geq w$ gilt. Die AKF $\varphi_{33}(\varkappa)$ der so erzeugten Zählenfolge

$$r_3(k) = r_2(l \cdot k) \tag{3.25}$$

ergibt sich dann zu

$$\varphi_{33}(\varkappa) = \varphi_{22}(l\varkappa) = \frac{N+1}{4N}\left[4^{1-w} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(l\varkappa+\nu N)\right] \tag{3.26}$$

Bild 3.6 zeigt für das Beispiel m = 5, l = w = 4 die AKF von $r_3(k)$.

Bild 3.6 : AKF von $r_3(k)$ für m = 5, l = w = 4

Mit $\tilde{N}$ ist der kleinste positive Wert von $\varkappa$ bezeichnet, für den der Summenausdruck in Gleichung (3.26) ungleich Null ist. Es muß also gelten

$$|l \cdot \tilde{N} + \nu N| < w \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z} \tag{3.27}$$

Der Wert $\tilde{N}$ läßt sich abschätzen mit

$$\tilde{N} > \frac{N-w}{l} \tag{3.28}$$

Für die hardware- wie auch softwaremäßige Realisierung interessanter Sonderfall ist $w = l = 2^\eta$. Damit hat die Beziehung (3.27) immer die Lösung für $\nu = -1$:

$$|l \cdot \tilde{N} - N| \leq w - 1$$

$$1 - 2^\eta \leq 2^\eta \cdot \tilde{N} - (2^m - 1) \leq 2^\eta - 1$$

$$2^{m-\eta} - 1 \leq \tilde{N} \leq 2^{m-\eta} + 1 - 2^{1-\eta}$$

$$\tilde{N} \in \{2^{m-\eta} - 1 \; , \; 2^{m-\eta}\}$$

also $$\tilde{N} = 2^{m-\eta} - 1 \tag{3.29}$$

Dieser Wert für $\tilde{N}$ ist die kleinste ganze Zahl, die die Gleichung (3.28) erfüllt, damit ist die Lösung für $\nu = -1$ gegeben.

Für die normierte AKF $\rho_{33}(\kappa)$ erhält man folgenden Ausdruck:

$$\rho_{33}(\kappa) = \frac{\varphi_{33}(\kappa) - \mu_3^2}{\varphi_{33}(0) - \mu_3^2}$$

$$= \frac{\frac{N+1}{4N}\left(4^{1-w} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{CO}(|\kappa+\nu N|)\right) - 4^{-w}\left(\frac{N+1}{N}\right)^2}{\frac{N+1}{4N}\left(4^{1-w} + \frac{4}{3}(1-4^{-w})\right) - 4^{-w}\left(\frac{N+1}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - 4^{w-1} \cdot N \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{OO}(|\kappa+\nu N|)}{1 - (4^w-1) \cdot N/3} \qquad (3.30)$$

Wesentlich ist, daß speziell für

$$0 < |\kappa| < \tilde{N}$$

gilt

$$\rho_{33}(\kappa) = \frac{1}{1 - (4^w-1)N/3} \approx -3 \cdot 2^{-(m+2w)} \qquad (3.31)$$

Bei hinreichend großem $w \leq m$, d. h. hinreichend langen Zufallszahlen und großem $\tilde{N}$ ist eine starke Dekorrelation erreicht, das Leistungsdichtespektrum wird also näherungsweise weiß.

c) Leistungsdichtespektrum der Pseudozufallszahlenfolge

Das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{33}(\mu)$ berechnet sich als diskrete Fouriertransformierte der Länge N der periodischen AKF $\varphi_{33}(\kappa)$ /10/:

$$\Phi_{33}(\mu) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} \varphi_{33}(\kappa) e^{-j\mu\kappa\frac{2\pi}{N}}$$

$$= \sum_{\kappa=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \varphi_{33}(\kappa)\cos(\mu\kappa\tfrac{2\pi}{N})$$

$$= \sum_{\kappa=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{N+1}{4N}\left[4^{1-w} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{oo}(l\kappa+\nu N)\right]\cos(\mu\kappa\tfrac{2\pi}{N})$$

$$= \frac{N+1}{4N}\left[4^{1-w}\cdot N\cdot\gamma_o(\mu) + \sum_{\kappa=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{oo}(l\kappa+\nu N)\cos(\mu\kappa\tfrac{2\pi}{N})\right] \qquad (3.32)$$

Wegen $\varphi_{oo}(\kappa) = 0$ für $|\kappa| \geq w$ läßt sich die Doppelsumme vereinfachen, weil für jedes κ nur höchstens ein ν existiert, für das

$$|l\kappa + \nu N| < w \qquad (3.33)$$

gilt. Die Herleitung findet sich in Anhang A 7.

$$\Phi_{33}(\mu) = (N+1)4^{-w}\gamma_o(\mu) + \frac{N+1}{4N}\sum_{\lambda=1-w}^{w-1} \varphi_{oo}(\lambda)\cdot\cos(\mu k_o\lambda\tfrac{2\pi}{N})$$

$$= (N+1)4^{-w}\gamma_o(\mu) + \frac{N+1}{4N}\left[\varphi_{oo}(0) + 2\sum_{\lambda=1}^{w-1} \varphi_{oo}(\lambda)\cos(\mu\lambda\frac{k_o 2\pi}{N})\right]$$

$$= (N+1)4^{-w}\gamma_o(\mu) + \frac{N+1}{3N}\left[1-4^{-w} - S(\mu)\right] \qquad (3.34)$$

mit

$$S(\mu) = \sum_{\lambda=1}^{w-1} (2^{-\lambda} + 2^{\lambda+1-2w}) \cos(2\pi\mu\lambda\frac{k_o}{N}) \quad ,$$

$$\mu \in \{0,1,\ldots,N-1\} \qquad (3.35)$$

und

$$k_o = \frac{1 - \nu_o N}{l} \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{l}{2} < \nu_o \leq \frac{l}{2} \qquad (3.36)$$

wird durch Probieren ermittelt.

Weiterhin gilt (vergl. Anhang A 7)

$$\frac{N-1}{l} \leq |k_o| \leq \frac{N-1}{2} \qquad (3.37)$$

Für den Sonderfall $w = l = 2^n$ ergibt sich die Lösung der Gleichung (3.35) mit

$$k_o = \frac{1+N}{l} = 2^{m-n} \qquad (3.38)$$

$$\nu_o = 1$$

Für reelles μ erhält man die Einhüllende des Linienspektrums, deren Form bestimmt ist durch den Summenausdruck

$$S(\mu) = \sum_{\lambda=1}^{w-1} a_\lambda \cos\left(\lambda \cdot \frac{2\pi\mu k_o}{N}\right) \tag{3.39}$$

sie ist also periodisch mit $\frac{N}{|k_o|}$. Das heißt, daß sich "Spektrallinienbündel" von $\frac{N}{|k_o|}$ Linien im Abstand $2\pi/N$ ergeben. Mit Gleichung (3.35) erhält man die Abschätzung

$$l \gtrsim N/|k_o| > 2 \tag{3.40}$$

Die "Bündel" werden in Bild 3.7 am Beispiel $m = 5$, $w = l = 4$ veranschaulicht, dabei ist $k_o = 8$.

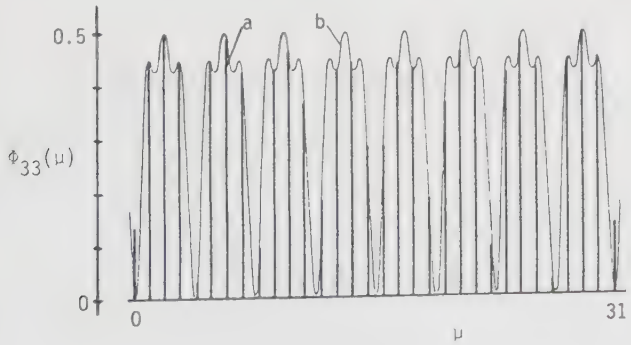


Bild 3.7: a: Leistungsdichtespektrum von $r_3(k)$ für $m = 5$, $w = l = 4$
b: Einhüllende des Leistungsdichtespektrums

Bei geeigneter Wahl der Schieberegisterlänge m wird die "Bündelbandbreite" $2\pi/|k_o|$ beliebig klein, so daß praktisch von einem "weißen" Leistungsdichtespektrum gesprochen werden kann. Diese Annahme läßt sich mit einem meßtechnischen Gesichtspunkt bestätigen: Da Frequenzauflösung und Meßzeit direkt voneinander abhängen, sind die Größen m und ι so zu wählen, daß bei der größten vorkommenden Meßzeit die Frequenzauflösung geringer ist als die Bündelbandbreite. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die maximale Meßzeit kleiner ist als $\tilde{N}\cdot T_A$, wobei $1/T_A$ die Wortfolgefrequenz von $r_3(k)$ ist, wodurch nur praktisch unkorrelierte Werte der Zahlenfolge verwendet werden.

d) Meßergebnisse

Für die Größen m = 31, $\iota = w = 16$ wurde eine TTL-Schaltung aufgebaut und bei einer Wortfolgefrequenz von 20 kHz ausgemessen. Aus $N = 2^{31} - 1$ und $\iota = 16$ ergibt sich $\nu_o = +1$, $k_o = 2^{27}$ und $\tilde{N} = 2^{27}-1$

Theoretische Werte:

Periodendauer:	$N\cdot T_A$ =	29,826 h	(N=2 147 483 647 = $2^{27}-1$)
max. Meßzeit :	$\tilde{N}\cdot T_A$ =	1,864 h	($\tilde{N}$= 134 217 727 = $2^{21}-1$)
Bündelbandbreite:	k_o/T_A=	$1{,}490\cdot10^{-4}$ Hz	($k_o = 2^{27}$)

Meßwerte:
Bild 3.8 zeigt die Verteilungsdichtefunktion. Die Meßzeit war 13,981 min, d. h. 2^{24} Abtastwerte wurden berücksichtigt, wobei die Messung in 2^7 Intervallen erfolgte.
Bild 3.9 zeigt das Leistungsdichtespektrum nach der D/A-Wandlung. Gemessen wurde mit dem Spektrumanalyser HP 3580 A bei einer Meßbandbreite von 3Hz. Zu erkennen ist der durch die D/A-Wandlung bedingte sin x/x-Verlauf.

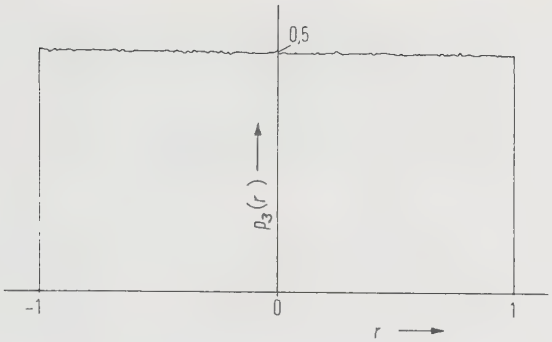


Bild 3.8: Gemessene Verteilungsdichtefunktion von $r_3(k)$; Meßdauer 2^{24} Abtastwerte, Auflösung 2^7 Intervalle

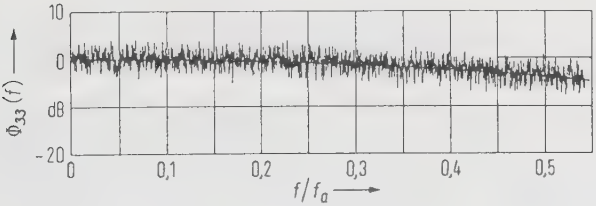


Bild 3.9: Gemessenes Leistungsdichtespektrum von $r_3(k)$ nach D/A-Wandlung

3.2.1.2 Transformation der Gleichverteilung in eine Gaußverteilung

Zur Erzielung einer gaußverteilen Zufallsvariablen aus einer (oder mehreren) gleichverteilten existieren im wesentlichen drei Verfahren:

Die Addition statistisch unabhängiger Zufallsgrößen wird sehr häufig angewandt, da die Realisierung verhältnismäßig einfach ist. /25/, /26/, /28/, /32/

- Lineare Filterung einer Folge /27/, /33/. Dieses Verfahren ist dem ersten Verfahren ähnlich, wenn die Folgeelemente statistisch unabhängig sind /34/. Für PN-Folgen ist diese Bedingung nicht erfüllt /35/.

- Eine nichtlineare Operation transformiert die Verteilungsdichtefunktion (z.B. Verfahren nach Box und Müller). Der Vorteil dieses Verfahrens besteht in der Verwendung nur einer bzw. zweier Zufallsfolgen, wobei die Folgeelemente nicht statistisch unabhängig sein müssen. Dieses Verfahren wird hier angewandt.

a) Transformation der Zufallsvariablen mit einer nichtlinearen Kennlinie

Im folgenden sei zur Vereinfachung der Darstellung zunächst von einer im offenen Intervall]-1, 1[kontinuierlich gleichverteilten Eingangsfolge $r_3(k)$ ausgegangen. Die Zufallsvariable nach der Transformation sei mit

$$r_4(k) = f\,(r_3(k)\,) \tag{3.41}$$

bezeichnet. Bei einer streng monotonen Funktion f muß die Verteilungsfunktion gelten:

$$P_4(f(r_3)) = P_3(r_3). \tag{3.42}$$

Da hier eine mittelwertfreie Gaußverteilung erzielt werden soll, gilt

$$\int_{-\infty}^{f(r_3)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-1}^{r_3} \frac{dx}{2} \tag{3.43}$$

Mit der bekannten Beziehung (z.B. /6/)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

ergibt sich daraus

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\, f(r_3)\right) = \frac{1+r_3}{2} \qquad (3.44)$$

und damit

$$f(r_3) = \sqrt{2}\sigma \cdot \mathrm{erf}^{-1}(r_3) \qquad |r_3| < 1 \qquad (3.45)$$

mit σ = Streuung der Gaußverteilung.

In Bild 3.10 ist der Verlauf von $r_4 = f(r_3)$ für $\sigma = 0{,}25$ angegeben

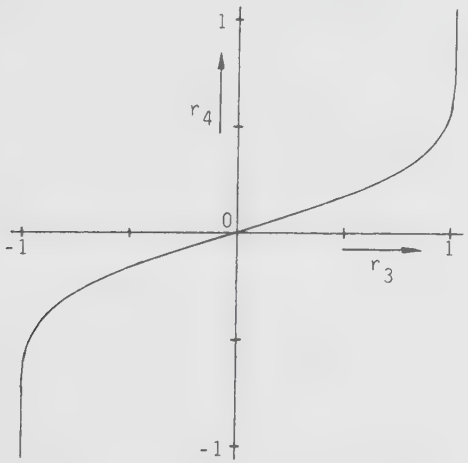


Bild 3.10: Verlauf von $f(r_3)$ für $\sigma = 0{,}25$

Bei der praktischen digitalen Realisierung treten verschiedene Probleme auf, die im folgenden dargestellt seien.

Da für die Ausgangsfolge $r_4(k)$ die gleiche Zweierkomplementdarstellung gewählt wird wie für $r_3(k)$, sind die Amplitudenstufen quantisiert und zudem im Wertebereich auf

$$-1 \leq r_4(k) < 1$$

beschränkt. Dies bedeutet, daß auch $f(r_3)$ auf diesen Wertebereich begrenzt werden muß. Da ein Rauschgenerator, der ein gauß'sches Geräusch bis $\pm 4\sigma$ approximiert, im allgemeinen als "gut" bezeichnet wird, wird die Streuung auf

$$\sigma = 0{,}25$$

festgelegt.

Eine einfache Realisierung der Kennlinie $f(r_3)$ wäre das Ablegen der berechneten Werte für f in einen ROM, so daß $r_3(k)$ als Adresse verwendet wird und $r_4 = f(r_3)$ den Speicherinhalt darstellt. Bei Festlegung der Wortlänge auf 16 bit wäre dann selbst bei Ausnutzung der Symmetrie der Funktion ein Speicher der Größe 32k x 15 bit nötig. Es erscheint daher sinnvoll, Stützwerte abzuspeichern und dazwischen zu interpolieren, bzw. die Funktion bereichsweise durch Polynome niedrigen Grades zu approximieren.

b) Stückweise Approximation der Kennlinie mit Polynomen niedrigen Grades

Die zu approximierende Funktion ergibt sich mit den oben genannten Festlegungen

$$\sigma = 0{,}25 \quad ; \quad w = 16 \qquad (3.46)$$

und der Kompensation des Mittelwertes μ_3 der Eingangsfolge $r_3(k)$ (Gleichung 3.18) für m = 31

$$\mu_3 = \frac{-2^{-16}}{1 - 2^{-31}} \approx - 2^{-16}$$

letztlich zu

$$r_4 = f(r_3) = \sqrt{2}\,\sigma\,\mathrm{erf}^{-1}(r_3 - \mu_3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\,\mathrm{erf}^{-1}(r_3 + 2^{-16}) \qquad (3.47)$$

mit $-1 \leq r_3 \leq 1 - 2^{-15}$

Zur Optimierung des Speicherplatzbedarfs für die Realisierung der Kennlinie wurden folgende Approximationen untersucht:

- Realisierung der Kennlinie nur im ersten Quadranten, der dritte Quadrant wird durch Vorzeichenverarbeitung ermittelt
- Unterteilung des Bereichs $0 \leq r_3 < 1$ in $n_i = 2^i$ gleichbreite Intervalle
- Polynomgrad $n_p = 1, 2, 3$
- Annahme einer kontinuierlich gleichverteilten Folge $r_3(k)$ für die Optimierung der Polynome.

Bei der Optimierung der Polynomkoeffizienten ist darauf zu achten, daß die approximierende Funktion nicht nur streng monoton sondern auch stetig ist, da sonst Unstetigkeitsstellen in der Verteilungsdichte der Ausgangsfolge entstehen.

Es sei

$$f_{\nu,n_p}(r_3) = \sum_{\mu=0}^{n_p} a_{\nu,\mu} r_3^{\mu} \qquad (3.48)$$

das approximierende Polynom n_p-ten Grades im ν-ten Intervall

$$r_3 \in \left[\frac{\nu-1}{n_i}, \frac{\nu}{n_i}\right[\quad ; \quad \nu \in \{1,\ldots,n_i\} \qquad (3.49)$$

Dann gilt wegen der geforderten Stetigkeit an den Intervallgrenzen

$$f_{\nu,n_p}\left(\frac{\nu}{n_i}\right) = f_{\nu+1,n_p}\left(\frac{\nu}{n_i}\right) \quad ; \quad \nu \in \{1,\ldots,n_i-1\} \qquad (3.50)$$

Mit der hohen Anzahl der verbleibenden $n_i \cdot n_p + 1$ Freiheitsgrade ist eine praktische Optimierung am Rechner nicht mehr möglich. Deshalb wird die approximierende Funktion an den Intervallgrenzen auf die Wunschfunktion festgelegt:

$$f_{\nu,n_p}\left(\frac{\nu-1}{n_i}\right) = f\left(\frac{\nu-1}{n_i}\right) \quad ; \quad \nu \in \{1,\ldots,n_i\}$$

$$f_{n_i,n_p}(1-2^{-15}) = (1-2^{-15}) \qquad (3.51)$$

Damit wird eine bereichsweise Optimierung mit $n_p - 1$ Freiheitsgraden pro Intervall möglich.

c) Verlauf der Verteilungsdichte bei Polynomapproximation der Tranformationskennlinie

Den Verlauf der Verteilungsdichtefunktion von $r_4(k)$ bei Interpolation zwischen den Stützpunkten nach Gleichung (3.51) erhält man durch partielle Differenziation aus Gleichung (3.42):

$$p_4(r_4) = \frac{d}{dr_4} P_3(r_3) = p_3(r_3) \cdot \frac{1}{f'(r_3)}$$

$$= \frac{p_3(f^{-1}(r_4))}{f'(f^{-1}(r_4))} \qquad (3.52)$$

wobei $p_3(r_3) = 0{,}5$ für $-1 \leq r_3 < 1$

wegen $0 < p_4(r_4) < \infty$ muß dann gelten

$$0 < f'(f^{-1}(r_4)) < \infty \qquad (3.53)$$

Mit den Polynomen $f_{\nu,np}(r_3)$ nach den Gleichungen (3.48) und (3.49) erhält man dann bereichsweise die im Anhang A 8 hergeleiteten Verteilungsdichten :

- Lineare Interpolation

$$p_{4,\nu}(r_4) = \frac{1}{2a_{\nu,1}} \qquad (3.54)$$

Die Verteilungsdichte ist bereichsweise konstant.

- Quadratische Interpolation

$$p_{4,\nu}(r_4) = \frac{1}{4\sqrt{a_{\nu,2}(r_4 - r_{4s})}}$$

$$\text{mit} \qquad r_{4s} = a_{\nu,o} - \frac{a_{\nu,1}^2}{4a_{\nu,2}} \qquad (3.55)$$

Die Verteilungsdichte hat einen bereichsweise hyperbelähnlichen Verlauf, die Krümmung ist immer positiv.

Kubische Interpolation

$$p_{4,\nu}(r_4) = \frac{1}{2(\alpha+(\gamma_1+\gamma_2)^2)}$$

mit $$\alpha = a_{\nu,1} - \frac{a_{\nu,2}^2}{3a_{\nu,3}}$$

$$\gamma_{1,2} = \sqrt[3]{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \alpha^3}}$$

$$\beta = \frac{3}{2}\sqrt{3a_{\nu,3}}\,(r_4 - r_{4w})$$

$$r_{4w} = a_{\nu,o} - \frac{a_{\nu,1} \cdot a_{\nu,2}}{3a_{\nu,3}} + \frac{2a_{\nu,2}^3}{27a_{\nu,3}^2} \qquad (3.56)$$

Der typische Verlauf der Verteilungsdichte ist an einer durchgeführten Approximation in Bild 3.13 zu erkennen.

Im Anhang A 8 sind weiterhin Randbedingungen für die Optimierung der Polynomkoeffizienten angegeben, die sich aus den Gleichungen (3.50), (3.51) und (3.53) ergeben.

d) Einführung eines Gütekriteriums

Die Pseudozufallszahlenfolge $r_4(k)$ weicht in ihren Eigenschaften von einer Folge, die bei Abtastung eines gauß'schen Geräusches entsteht, ab. Bezüglich der Verteilung wird deshalb ein Gütekriterium gesucht, um bei gegebenen Realisierungsaufwand die Kennlinie $f(r_4)$ so zu approximieren, daß die Folge $r_4(k)$ möglichst gut gaußverteilt ist.

Im vorliegenden Fall ist die Eingangsfolge $r_3(k)$ entgegen der oben gemachten Annahme nicht kontinuierlich verteilt, sondern besitzt entsprechend der gewählten Wortlänge 2^w diskrete Amplitudenstufen (vergl. Bild 3.4 und Gleichung (3.17)). Dadurch besitzt die Ausgangsfolge $r_4(k)$ auf Grund der festen Zuordnung durch die Kennlinie $f(r_3)$ ebenfalls 2^w Amplitudenstufen, die entsprechend der Steigung $f'(r^3)$ verschiedene Abstände zueinander haben. Speziell für $|r_3| \to 1$ werden diese Abstände wegen der großen Steigung $f'(r_3) \to \infty$ sehr groß.
Da die Folge $r_4(k)$ die gleiche Quantisierung besitzt wie die Folge $r_3(k)$ (jeweils Wortlänge w = 16), ist die Auftrittswahrscheinlichkeit der einzelnen Quantisierungsstufen sehr grob gerastert:

$$p_{4,\nu} = W\{ r_4(k) = \nu \cdot 2^{1-w} \} \quad ; \quad \nu \in Z$$

$$= \lambda \cdot 2^{-w} \quad ; \quad \lambda \in \{0,\ldots,4\} \quad \text{für } m \to \infty$$

Bild 3.11 veranschaulicht dies für w = 6

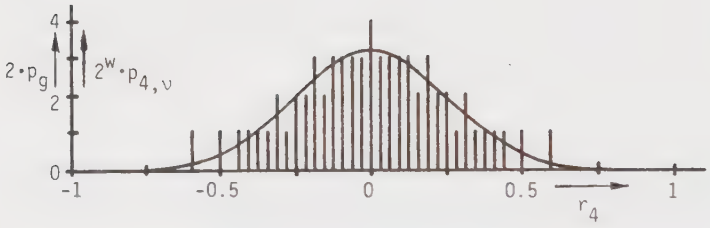


Bild 3.11 Gauß'sche Verteilungsdichte für $\sigma = 0{,}25$ und Histogramm der Verteilung von $r_4(k)$ für w = 6 bei exakter Kennlinie f

Der naheliegende Versuch, zur Beurteilung der Güte der Approximation die Verteilungsdichtefunktion $p_4(r)$ mit der Sollverteilungsdichtefunktion

$$p_g(r) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, e^{-8r^2} \qquad (3.57)$$

zu vergleichen, scheidet damit praktisch aus, da ein grob quantisiertes Histogramm mit einer stetigen Funktion zu vergleichen wäre (siehe Bild 3.11)

Häufig werden daher bei diskreten Verteilungen für die Beurteilung die zentralen Momente höherer Ordnung herangezogen, da diese bekanntlich mit der charakteristischen Funktion zusammenhängen, die wiederum die konjugiert komplexe Fouriertransformierte der Verteilungsdichtefunktion ist.

Die charakteristische Funktion ermittelt sich zu

$$C(\omega) = \mathcal{F}^{*}\{p_r(x)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_r(x) e^{jx\omega} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega^n \qquad (3.58)$$

Daraus erhält man die Momente n-ter Ordnung durch

$$E\{r^n\} = (-j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} C(\omega=0) = n!(-j)^n c_n \qquad (3.59)$$

Die Folge $r_4(k)$ ist mittelwertfrei und hat eine symmetrische Verteilung. Dadurch sind alle Momente ungeraden Grades gleich Null, und die Momente geraden Grades sind gleich den Zentralmomenten.

Zur Beurteilung der Approximationsgüte wurden die Quotienten M_n der Zentralmomente der Folge $r_4(k)$ und der Zentralmomente der (gewünschten) Gaußverteilung berechnet, wobei zur Normierung die Varianzen gleichgesetzt wurden. Bekanntlich gilt für eine mittelwertfreie Gaußverteilung

$$E\{r^n\} = \begin{cases} E\{r^2\}^{n/2} \cdot \prod_{\nu=1}^{n/2} (2\nu-1) & \text{für n gerade} \\ 0 & \text{für n ungerade} \end{cases} \qquad (3.60)$$

Berechnet wurde

$$M_n = \frac{E\{r_4^{\,n}\}}{E\{r_4^{\,2}\}^{n/2} \cdot \prod_{\nu=1}^{n/2} (2\nu-1)} \qquad \text{für n gerade} \tag{3.61}$$

für die exakt dargestellte Kennlinie nach Gleichung (3.47) sowie für verschiedene Approximationen. Die Eingangsvariable $r_3(k)$ wurde dabei diskret nach Gleichung (3.17) für w = 16 und m = 31 angenommen.
Dabei stellte sich heraus, daß verschieden genau dargestellte Kennlinien ähnliche Ergebnisse liefern und daß selbst eine schlechte Approximation kaum größere Abweichungen vom Sollwert $M_n = 1$ (n gerade) ergibt. In Bild 3.12 sind drei Beispiele gezeigt:

x "Schlechte" Approximation durch kubische Interpolation in 32 Intervallen, die bei kontinuierlich verteilter Folge $r_3(k)$ die in Bild 3.13 dargestellte Verteilungsdichte ergibt.

\+ "Sehr gute" Approximation durch lineare Interpolation in 4096 Intervallen.

o Exakte Kennlinie nach Gleichung (3.47), wobei jedoch der Zahlenbereich von $r_4(k)$ nicht auf ± 1 beschränkt bleibt, sondern wegen

$$r_{3max} = 1 - 2^{1-w} \quad , \; w = 16$$

die maximale Ausgangsamplitude

$$r_{4max} = f(r_{3max})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \, erf^{-1}(1-2^{-16})$$

$$= 1{,}0812 = 4{,}3249 \cdot \sigma \qquad (3.62)$$

beträgt.

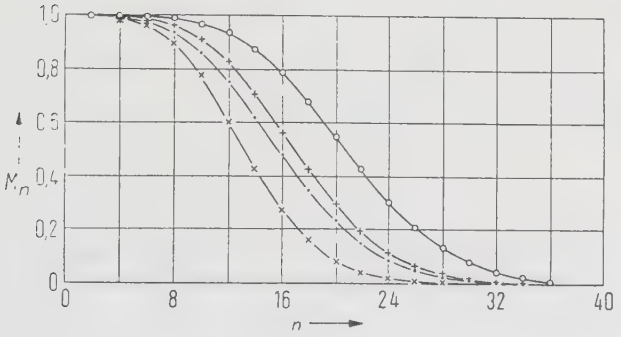


Bild 3.12: Relative Momente M_n der Zufallsvariablen $r_4(k)$ für verschiedene Approximationen der Kennlinie f

- o exakte Kennlinie
- \+ lin. Interpolation, 4096 Teilbereiche
- x kub. Interpolation, 32 Teilbereiche
- . kontinuierliche Verteilung mit auf 4σ beschränktem Wertebereich

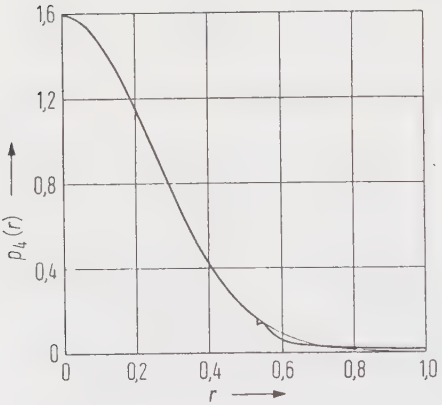


Bild 3.13: Verteilungsdichte von $r_4(k)$ bei Approximation der Verteilungsdichte in 32 Teilbereichen durch Polynome dritten Grades für $\sigma = 0{,}25$

Da die höheren zentralen Momente stärker von betragsmäßig großen Werten der Zufallsvariablen bestimmt werden, liegt die Vermutung nahe, daß die Werte M_n im wesentlichen durch den endlichen Zahlenbereich der Ausgangsgröße ($-1 \leq r_4 < 1$) bestimmt sind. Dies wurde dadurch bestätigt, daß eine in einem beschränkten Zahlenbereich kontinuierliche Gaußverteilung betrachtet wurde, die durch

$$\tilde{p}(r) = \begin{cases} \frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) & \text{für } |r| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |r| > 1 \end{cases} \tag{3.63}$$

mit $\sigma = 0{,}25$ gegeben ist, wobei v so gewählt wurde, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(r)dr = 1$$

ist. Die dazugehörigen Werte M_n sind ebenfalls in Bild 3.12 eingetragen.

Anhand der Ergebnisse kann ausgesagt werden, daß sich im allgemeinen eine bestimmte Approximation nicht mit den Momenten höherer Ordnung beurteilen läßt. Dies wird auch dadurch bestätigt, daß es möglich ist, eine n-stufige Verteilung so zu bestimmen, daß 2n-1 vorgegebene Momente exakt erreicht werden /37/. Das heißt, eine bezüglich der M_n sehr gute Approximation mit wenigen Stufen würde z. B. bezüglich der Verteilungsdichte völlig unbefriedigend bleiben. Als Möglichkeit der Beurteilung bleibt damit nur der Vergleich der Verteilungsfunktionen.
Die Verteilungsfunktion hat wegen der endlichen Wortlänge der Eingangs- und Ausgangsvariablen einen stufenförmigen Verlauf, wie in Bild 3.14 beispielhaft dargestellt, wobei die Stufen unterschiedlich breit und hoch sind.

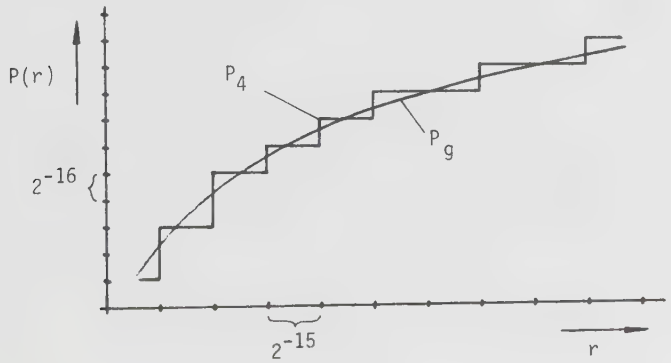


Bild 3.14: Beispielhafter Ausschnitt der Verteilungsfunktion von $r_4(k)$
$P_4(r)$ Verlauf bei einer Wortlänge von 16 bit
$P_g(r)$ idealer Verlauf

Als Fehler $\Delta(\nu)$ wird die Abweichung der approximierten Verteilungsfunktion $P_4(r)$ von der idealen $P_g(r)$ bei der ν -ten Quantisierungsstufe definiert:

$$\Delta(\nu) = \left| P_4(\nu \cdot 2^{-15}-1) - P_g(\nu \cdot 2^{-15}-1) \right|$$

$$\nu = 1(1)2^{16} \qquad (3.64)$$

Als Kenngrößen für die Güte der Approximation wird der maximale Fehler Δ_{max} betrachtet:

$$\Delta_{max} = \max[\Delta(\nu) \mid \nu = 1(1)2^{16}] \qquad (3.65)$$

Für die exakt dargestellte Kennlinie nach Gleichung (3.47) - entspricht $n_i = 2^{15}$ - und für Approximationen verschiedenen Grades und Intervallanzahl wurden die Werte Δ_{max} berechnet, wobei die Eingangsvariable $r_3(k)$ diskret nach Gleichung (3.17) mit w = 16 und m = 31 angenommen wurde. Bei den Approximationen zweiten und dritten Grades wurden dazu die Polynomkoeffizienten so optimiert, daß die Fehler Δ_{max} minimal wurden.

In Bild 3.15 sind über die Intervallanzahlen n_i die Werte Δ_{max} für Interpolationen verschiedenen Grades aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß die Fehler mit wachsender Intervallanzahl gegen einen Grenzwert streben, der von der endlichen Wortlänge bestimmt ist. Dieser Grenzwert beträgt theoretisch

$$\min\{\Delta_{max}\} = (\max\{p_g(r_4)\} + 0{,}5) \cdot 2^{-w}$$

$$= (\sqrt{\frac{8}{\pi}} + 0{,}5) \cdot 2^{-16} = 2{,}096 \cdot 2^{-16} \qquad (3.66)$$

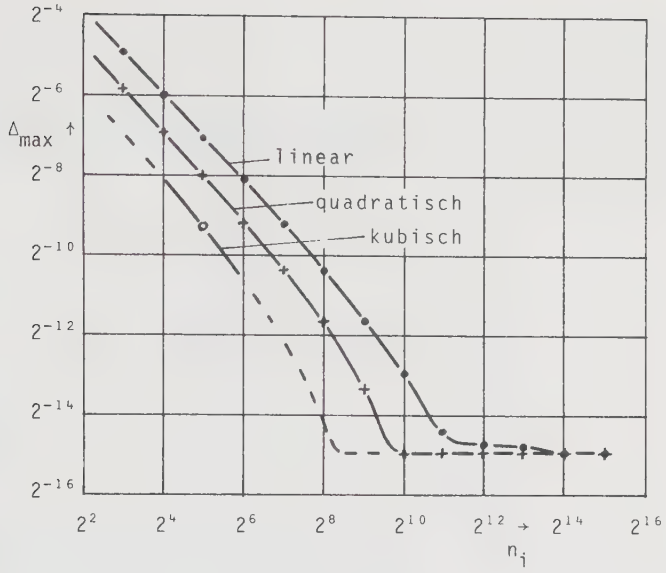


Bild 3.15: Fehler Δ_{max} bei verschiedenen Approximationen

Weiterhin sieht man, daß jede Graderhöhung die Intervallanzahlen bei etwa gleichbleibendem Fehler halbiert. Dadurch ist die Anzahl der Koeffizienten bei kubischer Interpolation zwar am geringsten, sie müssen jedoch verschieden genau, d. h. mit unterschiedlichen Wortlängen, abgespeichert werden, um die arithmetischen Fehler klein zu halten. Zusammen mit der Tatsache, daß sich bei linearer Interpolation die Steigung a_1 sehr einfach aus zwei benachbarten Stützpunkten berechnen läßt, ist deshalb eine lineare Interpolation, für die n_i+1 Stützpunkte nach Gleichung (3.51) abgespeichert werden, die günstigste Realisierung.

e) AKF der Zahlenfolge $r_4(k)$

Die Autokorrelationsfolge $\varphi_{44}(\varkappa)$ der periodischen Folge $r_4(k)$ läßt sich mit den Gleichungen (3.20), (3.25) und (3.41) berechnen:

$$\varphi_{44}(\varkappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} r_4(k) \cdot r_4(k-\varkappa) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(r_2(lk)) \cdot f(r_2(lk-\varkappa)) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\Big(\sum_{\eta=0}^{w-1} h_0(\eta) \cdot r_1(lk-\eta) \Big) \cdot$$

$$\cdot f\Big(\sum_{\eta=0}^{w-1} h_0(\mu) \cdot r_1(lk-\mu-\varkappa) \Big) \qquad (3.67)$$

Die AKF $\varphi_{22}(\varkappa)$ der Folge $r_2(k)$ weist für die Verzögerungen $\varkappa$, für die $|\varkappa| < w$ gilt, vom Minimalwert verschiedene Werte auf, die dann durch Unterabtastung über die Periode N verteilt werden. An diesen Punkten wird auch $\varphi_{44}(\varkappa)$ Werte annehmen, die größer als ein Minimalwert sind. Um die Berechnung dieser Werte und die Darstellung zu vereinfachen, sei die Unterabtastung mit der Kennlinie f vertauscht, so daß gilt

$$\tilde{r}_4(k) = f\,(r_2(k)) \qquad (3.68)$$

$$r_4(k) = \tilde{r}_4(l \cdot k) \qquad (3.69)$$

Zunächst interessieren die Werte

$$\tilde{\varphi}_{44}(\varkappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{r}_4(k)\tilde{r}_4(k-\varkappa) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\Big(\sum_{\eta=0}^{w-1} h_0(\eta) r_1(k-\eta) \Big) \cdot$$

$$\cdot f\Big(\sum_{\mu=0}^{w-1} h_0(\mu) r_1(k-\mu-\varkappa) \Big)$$

(3.70)

für $|\varkappa| < w$. Da eine geschlossene Berechnung dieses Ausdrucks auch aufgrund der Approximation von f beliebig aufwendig ist, wurden die Werte $\tilde{\varphi}_{44}(k)$ durch Simulation numerisch ermittelt. Dabei wurde die Kennlinie f durch lineare Interpolation in 4096 Intervallen dargestellt und bei fester Wortlänge w = 16 die Rechnung durchgeführt. In Tabelle 3.2 ist die normierte AKF $\tilde{\rho}_{44}(\varkappa)$ sowie die Streuung σ angegeben. Zum Vergleich wurde auch die normierte AKF $\rho_{22}(\varkappa)$ der Eingangsfolge r_2 angegeben, die nach Gleichung (3.23) und (3.30) ermittelt wurde. Dabei hängen die normierten Autokorrelationsfunktionen nur von der Wortlänge w ab, während die Streuungen auch von der Schieberegisterlänge m bestimmt werden.

κ	$\tilde{\rho}_{44}(\kappa)$	$\rho_{22}(\kappa)$	$\rho_{gg}(\kappa)$
1	-,198931	-,250000	-,261052
2	-,116436	-,125000	-,130806
3	-,066065	-,062500	-,065438
4	-,036666	-,031250	-,032723
5	-,020028	-,015625	-,016362
6	-,010809	-,007813	-,008181
7	-,005780	-,003906	-,004091
8	-,003070	-,001953	-,002045
9	-,001623	-,000977	-,001023
10	-,000856	-,000489	-,000512
11	-,000454	-,000245	-,000256
12	-,000245	-,000123	-,000128
13	-,000127	-,000063	-,000066
14	-,000071	-,000034	-,000036
15	-,000040	-,000023	-,000024
$\sigma \cdot \sqrt{1-2^{-m}}$	,249986	,577350	,250000

Tabelle 3.2: normierte AKF der Signale r_2 und $\tilde{r}_4$

Wenn die Elemente der Folge $\tilde{r}_4$ Abtastwerte r_g eines "echten" gaußschen Prozesses wären, könnte die AKF $\tilde{\varphi}_{44}(\varkappa) = \varphi_{gg}(\varkappa)$ anhand der in Kapitel 3.2 angegebenen Beziehungen geschlossen aus der AKF $\rho_{22}(\varkappa)$ berechnet werden. Dazu müßte die Verbundverteilungsdichte zweier in Abstand $\varkappa$ abgetasteter Werte von $\tilde{r}_4$ bei Mittelwertfreiheit die Form

$$p_{gg}(x,y,\varkappa) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\varkappa)}} \exp\left\{\frac{-x^2+2\rho(\varkappa)xy-y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(\varkappa))}\right\} \tag{3.71}$$

besitzen, wobei

$$x = r_g(k) \text{ und } y = r_g(k-\varkappa)$$

geschrieben wurde und $\rho(\varkappa)$ die normierte AKF $\rho_{gg}(\varkappa)$ von r_g ist.
Bei der hier untersuchten Realisierung ist nur die eindimensionale Amplitude (näherungsweise) gaußverteilt, die Verbundverteilungsdichte hat hingegen die Form

$$\tilde{p}_{44}(x,y,\varkappa) = \frac{2}{\pi\sigma^2} \exp\left\{\frac{-x^2-y^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot p_{22}(f^{-1}(x),f^{-1}(y),\varkappa,w,m) \tag{3.72}$$

Dabei ist p_{22} die Verbundverteilungsdichte von r_2, die von der Wortlänge, Schieberegisterlänge und von der Rückführung des Schieberegisters abhängt.

Um den Unterschied zu den Werten von $\tilde{\varphi}_{44}(\varkappa)$ nach Gleichung (3.70) aufzuzeigen, wurde unter der Annahme, $\tilde{r}_4$ sei eine "echte" gauß'sche Folge r_g , die Berechnung der AKF $\varphi_{gg}(\varkappa)$ durchgeführt.
Aufgrund der eineindeutigen Zuordnung durch die Kennlinie f lassen sich die Beziehungen zwischen r_g und r_2 umkehren:

$$r_g = f(r_2) \quad <=> \quad r_2 = f^{-1}(r_g)$$

$$\varphi_{gg} = g^{-1}(\varphi_{22}) \quad <=> \quad \varphi_{22} = g(\varphi_{gg}) \tag{3.73}$$

Mit den Gleichungen (3.45), (3.11), (3.12) und (3.13) lassen sich aus der Nichtlinearität f^{-1} die Koeffizienten der Potenzreihe g berechnen. Durch Bilden der Umkehrfunktion g^{-1} und Übergang zu normierten Autokorrelationsfunktionen erhält man letzlich die Beziehung

$$\rho_{gg}(\varkappa) = 2 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{6} \cdot \rho_{22}(\varkappa)) \tag{3.74}$$

Die Herleitung ist im Anhang A9 angegeben. In Tabelle 3.2 sind die Werte $\rho_{gg}(\varkappa)$ für $|\varkappa| < w$ angegeben, die für die exakte Kennlinie (ohne Wertebereichsbeschränkung) gelten würden, was eine kontinuierlich gleichverteilte Zufallsfolge r_2 voraussetzt.

Bei der Berechnung der Werte $\tilde{\varphi}_{44}(\varkappa)$ anhand der Simulation für w = 16 und m = 22 ergaben sich für $w \leq \varkappa \leq N-w$ Werte, die teils exakt Null, teils aber auch deutlich von Null verschieden sind. Die Ursache hierfür ist, daß die Elemente der Folge r_2

im Abstand $\varkappa \geq w$ zwar nahezu dekorreliert sind (vergleiche Gleichungen (3.23) und (3.31)) aber wegen ihrer Determiniertheit durch die Schieberegisterrückführung nicht statistisch unabhängig sind. Diese nichtlineare Abhängigkeit ergibt zusammen mit der nichtlinearen Kennlinie f eine je nach Abstand $\varkappa$ verschieden starke lineare Abhängigkeit.

Um zu einer Aussage über diese Abhängigkeiten zu gelangen, wurde zunächst die bit-weise Abhängigkeit der Folgenelemente $r_2(k)$ und $r_2(k-\varkappa)$ betrachtet. Wie allgemein bekannt ist, läßt sich die verzögerte Pseudozufallszahlenfolge $r_1(k-\varkappa)$ durch mod-2-Verknüpfung bestimmter Abgriffe des Schieberegisters erzielen. Gemäß Bild 3.3 besteht der Schieberegisterinhalt aus den Elementen $\{r_1(k),\ldots,r_1(k+m-1)\}$.
Es gilt dann

$$r_1(k-\varkappa) = \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} b_{m,\varkappa}(\nu) \cdot r_1(k+\nu) \right]_{\text{mod } 2}$$

$$= g_{m,\varkappa}(r_1(k),\ldots,r_1(k+m-1))$$

$$\text{mit} \qquad b_{m,\varkappa} \in \{0, 1\} \qquad (3.75)$$

wobei ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen der Verzögerung $\varkappa$ und dieser mod-2-Funktion $g_{m,\varkappa}$ besteht. (Speziell ist $g_{m,-m}$ die Schieberegisterrückführung mit $b_{m,-m}(0) = 1$.)
Damit läßt sich jedes Bit des Folgenelements $r_2(k-\varkappa)$ mit der entsprechenden Funktion $g_{m,\lambda}$; $\lambda = \varkappa(1)\varkappa+w-1$ aus dem im w-1 Takte T_o verzögerten Schieberegisterinhalt $\{r_1(k-w+1),\ldots, r_1(k-w+m)\}$ errechnen (vergleiche Bild 3.3). Ist nun eine dieser Funktionen $g_{m,\lambda}$ vom Grad $< w$, werden nur die Elemente $\{r_1(k-w+1),\ldots, r_1(k)\}$ verknüpft. Das bedeutet, daß das zugehörige Bit des Folgenelements $r_2(k-\varkappa)$ gleich der mod-2-Summe von bestimmten nur vom Element $r_2(k)$ stammenden Bits ist.

Wegen der Symmetrie der AKF sind auch die direkten Abhängigkeiten der einzelnen Bits des Elements $r_2(k)$ von denen des Elements $r_2(k-\varkappa)$ von Bedeutung. Weiterhin existieren noch Abhängigkeiten derart, daß die mod-2-Summe bestimmter Bits des Elements $r_2(k)$ gleich der mod-2-Summe entsprechender Bits des Elements $r_2(k-\varkappa)$ ist. Allgemein liegt eine direkte Abhängigkeit vor, wenn die beiden Bedingungen

$$g_{m,\lambda}(r_1(k-w+1),..,\ r_1(k-w+m)) =$$

$$= g_{m,\lambda-\varkappa}(r_1(k-\varkappa-w+1),...,\ r_1(k-\varkappa-w+m)) \tag{3.76}$$

mit $\lambda \in \{0,...,\ N-1\}$

und

$$\max \text{Grad}\ (g_{m,\lambda}\ ,\ g_{m,\lambda-\varkappa}) < w \tag{3.77}$$

erfüllt sind.

Bei der stichprobenweisen Bestimmung der Werte $\tilde{\varphi}_{44}(\varkappa)$ wurden jene Verzögerungen $\varkappa$ näher betrachtet, die eine relativ starke Korrelation ergaben. Durch Ermittlung der Funktionen $g_{m,\lambda}$; $\lambda = \varkappa\ (1)\ \varkappa + w-1$ mit dem in /38/ angegebenen Algorithmus stellte sich heraus, daß dann eine starke Korrelation vorliegt, wenn das höchstwertige Bit des Elements $r_2(k-\varkappa)$ gleich der mod-2-Summe dreier hochwertiger Bits des Elements $r_2(k)$ ist. Deshalb wurde speziell die Verzögerung $\varkappa_1$ betrachtet, für die das höchstwertige Bit des Elements $r_2(k-\varkappa_1)$ von den drei höchstwertigen Bits des Elements $r_2(k)$ abhängt. Für den Fall, daß sonst keine weiteren Abhängigkeiten existieren, wurde durch vereinfachte Simulation der Wert

$$\tilde{\rho}_{44}(\varkappa_1) = 0{,}1236 \approx \frac{1}{8}$$

ermittelt.

Es wird angenommen, daß keine stärkeren Korrelationen auf Grund der bitweisen Abhängigkeiten auftreten.

Während durch die Unterabtastung die Korrelationen benachbarter Folgenelemente ($|\varkappa| < w$, vergleiche Tabelle 3.2) auf Verzögerungen $|\varkappa| \geq \tilde{N}$ verteilt werden (vergleiche Bild 3.6), können die Korrelationen auf Grund der nichtlinearen Abhängigkeiten auch bei $|\varkappa| << \tilde{N}$ auftreten. Ihre Lagen sind von der Rückführung und der Länge des Schieberegisters bestimmt Durch die Funktionen $g_{m,\varkappa}$ ist die Größe der Korrelation gegeben, die selbst für $m \to \infty$ nicht verschwindet.

Für die praktische Realisierung bedeutet dies, daß die Schieberegisterrückführung $g_{m,-m}$ durch Probieren so zu wählen ist, daß für Verzögerungen, die kleiner als die Meßdauer sind, keine stärkeren Korrelationen auftreten.

3.2.2 Realisierter Modellsignalgenerator für den Rauschklirrmeßplatz

Von den Funktionsblöcken des Modellsignalgenerators nach Bild 3.1 sind die beiden ersten, die Erzeugung zweier gauß'scher Signale r_4 und r_5, im vorherigen Kapitel ausführlich dargestellt worden. Dabei wird aus einer mit einem rückgekoppelten Schieberegister der Länge m = 31 erzeugten Pseudozufallszahlenfolge durch Unterabtastung (ι = 16) eine gleichverteilte Zweierkomplementzahlenfolge mit der Wortlänge w = 16 und nahezu weißem Spektrum gewonnen. Diese wird mittels einer nichtlinearen Kennlinie in eine im Bereich ± 1 gaußverteilte Folge mit näherungsweise weißem Spektrum und der Streuung σ = 0,25 transformiert. Die nichtlineare Kennlinie wird durch lineare Interpolation in einem Quadranten und 4096 gleichbreiten Abschnitten realisiert.

Die Dimensionierung der beiden nächsten Funktionsblöcke, der linearen Filter H_1 und H_2 zur Formung der AKF des Modellsignals, erfolgte in Hinblick auf die in Kapitel 4.2 und 4.3 vorgestellten Messungen an sprachübertragenden Systemen. Dabei erhält das Signal r_7 durch das Filter H_2 ein Spektrum, das das Langzeitspektrum der Sprache approximiert. Grundlage für diese Dimensionierung ist eine Untersuchung über Langzeitspektren, die in / 39 / angegeben ist. Die Realisierung geschieht mit einem (digitalen) Filter sechsten Grades. Die Koeffizienten wurden aus den Polen und Nullstellen eines analogen Systems berechnet, das durch eine Approximation mittels Bodediagramm gefunden wurde. Die Übertragungsfunktion $|H_2|$ ist in Bild 3.16 dargestellt, die gemessene normierte AKF ρ_{77} in Bild 3.17

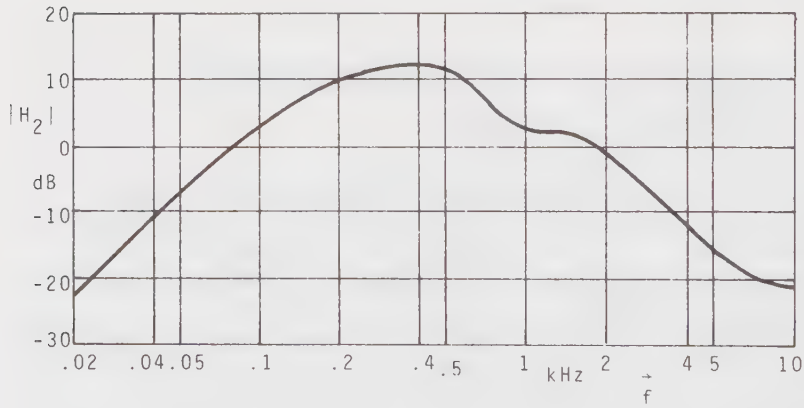


Bild 3.16: Übertragungsfunktion $|H_2|$ zur Approximation des Langzeitspektrums der Sprache

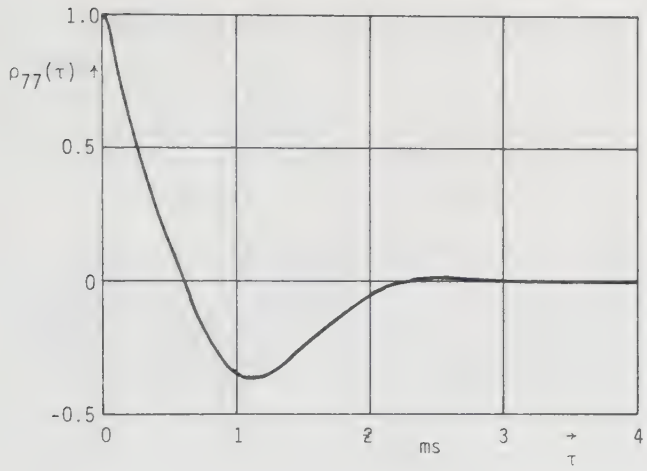


Bild 3.17: normierte AKF der Folge r_7

Das Signal r_6 wird mit dem Tiefpaß H_1 so geformt, daß es mit seinem Zeitverlauf die Amplitudenschwankungen der Sprache approximiert. Für die normierte AKF ρ_{66} ergibt das die Forderung

$$\rho_{66} \approx \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \tau < 5 \text{ ms} \\ 0 & \text{für} \quad \tau > 50 \text{ ms} \end{cases} \tag{3.78}$$

Diese Bedingungen werden mit einem Tiefpaß zweiten Grades mit einer 3 dB-Grenzfrequenz von 10,7 Hz approximiert.

Es sei darauf hingewiesen, daß bei einer linearen Filterung von PN-Folgen, wenn die Impulsantwort länger ist als das generierende Schieberegister, die Verteilungsdichte nicht den erwarteten Verlauf haben muß (vergleiche /40/, /41/ für nichtrekursive Filterung). Im vorliegenden Fall, d. h. rekursive

Filterung nach nichtrekursiver Filterung, Unterabtastung und nichtlinearer Abbildung, ist zwar das Ausgangssignal r_6 bzw. r_7 mittelwertfrei mit der Streuung $\sigma = 0{,}25$, jedoch wurde in einem Fall eine Unsymmetrie des Tiefpaßgeräusches r_6 festgestellt. Durch Modifikation der Schieberegisterrückführung konnte die gewünschte Gaußverteilung erhalten werden.

Die beiden Filter H_1 und H_2 können an dem vierkanaligen rekursiven digitalen Filter, das in Kapitel 2.3 zur Realisierung der variablen Bandsperre und des Bandpasses verwendet wird, eingestellt werden. Die dazu nötigen Filterkoeffizienten bei L_2-Skalierung (nach /15/) sind in Tabelle 3.3 angegeben.

	H_1	H_2		
b_2	0,00049019	0,37928647	0,56290156	1,21610141
b_1	0,0	0,0	-0,95680702	-2,43220282
b_0	0,0	0,0	0,43696818	1,21610141
c_1	-1,99298286	-1,41193807	-1,82807970	-1,90712130
c_0	0,99300003	0,60653055	0,85142767	0,90941274

Tabelle 3.3: Filterkoeffizienten für Modellsignalgenerator für sprachähnliches Signal

Der letzte Funktionsblock nach Bild 3.1, die nichtlineare Kennlinie zur Formung der Verteilungsdichte des Signals $r_8(k)$, ist so zu dimensionieren, daß die Verteilungsdichte des Modellsignals $u(k)$ möglichst gut der Sprache entspricht. In /42/ wird festgestellt, daß eine spezielle Gammaverteilung

$$p(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8\pi|x|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}|x|\right) \qquad (3.79)$$

die Verteilung der Sprache gut approximiert, daß aber auch die K_0-Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\pi} K_0(|x|) \tag{3.80}$$

eine brauchbare Approximation darstellt und zudem einfach zu realisieren ist. Nach Tabelle 3.1 erhält man für die Verteilung des Signals $r_8(k)$ die gauß'sche, d. h. wegen $r_8(k) = r_6(k)$ kann dann die Nichtlinearität f zur Umformung von r_6 entfallen.

Für das realisierte Modellsignal u(k) gelten mit den oben gemachten Festlegungen für die Dimensionierung folgende Beziehungen:

$$p_u(v) \approx \frac{16}{\pi} K_0(16|v|) \tag{3.81}$$

$$\varphi_{uu}(\varkappa) \approx 2^{-8} \rho_{77}(\varkappa) \tag{3.82}$$

mit ρ_{77} gemäß Bild 3.17 mit $\tau = \varkappa \cdot 50\ \mu s$

4. MESSERGEBNISSE UND DISKUSSION

Mit dem Rauschklirrmeßplatz, dessen Realisierung in Kapitel 2.3 beschrieben ist, sind Messungen an verschiedenen Systemen zur Sprachübertragung durchgeführt worden. Die Meßergebnisse werden mit Näherungen, die theoretisch oder durch Simulation von verschiedenen Autoren gefunden wurden, verglichen bzw. eigene Näherungen angegeben.
Im folgenden werden Messungen an unterschiedlichen PCM- und ΔM-Systemen behandelt. Zunächst werden Testmessungen vorgestellt, die eine Aussage über die Genauigkeit des Meßverfahrens ergeben sollen.

4.1 Testmessungen

Im Kapitel 2.2 werden die Meßfehler, die durch das verallgemeinerte Rauschklirrmeßverfahren bedingt sind, behandelt. Dabei sind zwei Arten von Meßfehlern zu unterscheiden:

a) Meßfehler, die vom Meßaufbau abhängen.
Diese sind in den Kapiteln 2.2.2, 2.2.3 und 2.3.4 theoretisch abgeschätzt und durch Messungen bestätigt worden.

b) Meßfehler, die von den statistischen Eigenschaften des Testsignals oder vom Meßobjekt abhängen (vergleiche Kapitel 2.2.1). Hierzu wurden die folgenden Testmessungen durchgeführt. Die Meßparameter dafür waren:

$$\left.\begin{aligned} N_\Phi &= 1024 \\ L &= 195 \\ f_A &= 20\ \text{kHz} \end{aligned}\right\} \quad T = 9{,}984\ \text{sec}$$

$$f_m = n \cdot 250\ \text{Hz} \ ; \quad n = 1 \ldots 32$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (2.85) eine relative Streuung der Meßwerte für die Leistungsdichten von 0,39 dB ($\hat{=}\ \varepsilon_\Phi$ für S = 68 %)

4.1.1. Gedächtnislose schwache Nichtlinearität

Wählt man für das zu messende System eine schwach nichtlineare Funktion

$$f(u) = u + f_1(u) \quad , \tag{4.1}$$

so läßt sich bei geeigneten Voraussetzungen das Nutz- und Störspektrum einfach berechnen.

Die AKF des Ausgangssignals

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + f_1(u(t)) \\ &= u(t) + e(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

erhält man bei ergodischem Eingangssignal u(t) zu

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{uu}(\tau) + \varphi_{ee}(\tau) + \varphi_{ue}(\tau) + \varphi_{ue}(-\tau) \tag{4.3}$$

Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals berechnet sich mittels Fouriertransformation:

$$\Phi_{yy}(\omega) = \Phi_{uu}(\omega) + \Phi_{ee}(\omega) + 2\mathrm{Re}\{\Phi_{ue}(\omega)\} \tag{4.4}$$

Die Berechnung der Spektralanteile über die Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen ist im allgemeinen sehr aufwendig und setzt die Kenntnis der Verbundverteilungsdichte

$$p_{uu}(u(t),\ u(t+\tau))$$

des Eingangssignals voraus. Nur bei "echtem" gauß'schen Eingangssignal läßt sich die Berechnung mit der AKF $\varphi_{uu}(\tau)$ durchführen /22/.
Zur Vereinfachung der Rechnung wird hier vorausgesetzt, daß Abtastwerte von u(t) beliebigen Abstands statistisch unabhängig sind. Weiterhin wird gefordert, daß das Störsignal e(t) nicht mit dem Eingangssignal u(t) korreliert ist:

$$\varphi_{ue}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_1(v) p_u(v) dv = 0 \tag{4.5}$$

Eine hinreichende Bedingung hierfür ist eine gerade Funktion f_1 und eine symmetrische (also gerade) Amplitudenverteilungsdichte p_u des Eingangssignals, also

$$f_1(-u) = f_1(u)$$

$$p_u(-v) = p_u(v) \tag{4.6}$$

Damit erhält man:

$$\varphi_{uu}(\tau) = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 = \mu_u^2 & \text{für } \tau \neq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\varphi_{ee}(\tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(v) p_u(v) dv = \sigma_e^2 + \mu_e^2 & \text{für } \tau = 0 \\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(v) p_u(v) dv\right]^2 = \mu_e^2 & \text{für } \tau \neq 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Die Anteile des Leistungsdichtespektrums Φ_{yy} sind somit für $\omega \neq 0$ konstant.

Bei der praktischen Realisierung erhält man im allgemeinen kein Rauschsignal, dessen Abtastwerte statistisch unabhängig sind, sondern lediglich annähernd dekorreliert (vergleiche Kapitel 3.2). Bei Gültigkeit der Gleichung (4.7) erhält man aus Gleichung (4.5)

$$\varphi_{ue}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ue}(\omega) d\omega = 0 \qquad (4.9)$$

und damit

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\{\Phi_{ue}(\omega)\}\, d\omega = 0 \qquad (4.10)$$

Aus der Beziehung (4.8), die dann nur für $\tau = 0$ gilt, erhält man

$$\varphi_{ee}(0) - \mu_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_{ee}(\omega)\, d\omega = \sigma_e^2 \qquad (4.11)$$

mit $\tilde{\Phi}_{ee}(\omega) = \Phi_{ee}(\omega)$ für $\omega \neq 0$

und daraus

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi_{ee}(\omega) d\omega = \pi \sigma_e^2 \qquad (4.12)$$

Das heißt, die Anteile Φ_{ee} und $2Re\{\Phi_{ue}\}$ des Leistungsdichtespektrums Φ_{yy} sind für $\omega \neq 0$ im allgemeinen nicht konstant, Das Störsignal e(t) hat also nicht notwendig ein weißes Spektrum; die Streuung σ_e ist jedoch unabhängig von der statistischen Abhängigkeit innerhalb des Eingangssignals u(t).

Messung 1

Eingangssignal und Nichtlinearität waren wie folgt definiert:

$$f(u) = u + 2^{-5}|u| \tag{4.13}$$

$$p_u(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } |v| < 0{,}5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.14}$$

$\Phi_{uu}(\omega)$ im Rahmen der Meßgenauigkeit konstant.

Damit ergeben sich die theoretischen Werte für Signalleistung S und Störleistung N :

$$S = \sigma_u^2 = \frac{1}{12} \hat{=} -10{,}792 \text{ dB} \tag{4.15}$$

$$N = \sigma_e^2 = \frac{2^{-12}}{12} \hat{=} -46{,}916 \text{ dB} \tag{4.16}$$

$$S/N = 2^{12} \hat{=} 36{,}124 \text{ dB} \tag{4.17}$$

Der im Ausgangssignal enthaltene Gleichanteil beträgt

$$\mu_e = 2^{-7} \tag{4.18}$$

Die gemessenen Werte sind

$$\hat{S} \cong -10{,}78 \text{ dB} \; ; \quad \hat{S} - S \cong 0{,}01 \text{ dB} \tag{4.19}$$

$$\hat{N} \cong -46{,}48 \text{ dB} \; ; \quad \hat{N} - N \cong 0{,}43 \text{ dB} \tag{4.20}$$

$$\hat{S/N} \cong 35{,}70 \text{ dB} \tag{4.21}$$

Die Meßwerte der Leistungsdichtespektren von Nutzsignal bzw. Störsignal haben eine Standardabweichung von 0,27 dB bzw. 0,36 dB (theor. < 0,39 dB).
Die gemessene Störleistung ist etwa 0,4 dB zu groß, was an der Verschleifung der Gleichverteilung durch die Bandsperre liegt (vergleiche Bild 2.6), da mit "breiter" werdender Verteilung das S/N-Verhältnis abnimmt. (Bei Gaußverteilung erhielte man 34,499 dB)

Messung 2

Bei der Nichtlinearität wie bei Messung 1 wurde eine gaußähnliche Verteilung des Eingangssignals gewählt (Addition von acht unabhängigen gleichverteilten Variablen).

$$f(u) = u + 2^{-5} \cdot |u| \tag{4.22}$$

$$p_u(v) = 16 \sum_{\nu=-4}^{+4} \frac{(-1)^{\nu} |4v+\nu|^7}{(4-\nu)!\,(4+\nu)!} \tag{4.23}$$

$\Phi_{uu}(\omega)$ im Rahmen der Meßgenauigkeit konstant.
Die theoretischen Werte sind dann

$$S = \sigma_u^2 = \frac{1}{24} \cong -13{,}802 \text{ dB} \tag{4.24}$$

$$N = \sigma_e^2 = 1218047 \cdot 2^{-18} \cdot 3^{-8} \cdot 7^{-2} = 1{,}4453 \cdot 10^{-5}$$

$$\hat{=} \; -48{,}400 \text{ dB} \qquad (4.25)$$

$$S/N \;\hat{=}\; 34{,}598 \text{ dB} \qquad (4.26)$$

$$\mu_e = \frac{1}{1152} \sum_{\nu=-4}^{+4} \frac{(-1)^{\nu} \left[(4-\nu)^8 (32+\nu) + |\nu|^9 \right]}{(4-\nu)!\,(4+\nu)!} = 0{,}00512222 \qquad (4.27)$$

Die gemessenen Werte sind

$$\hat{S} \;\hat{=}\; -13{,}83 \text{ dB} \quad ; \quad \hat{S} - S \;\hat{=}\; -0{,}03 \text{ dB} \qquad (4.28)$$

$$\hat{N} \;\hat{=}\; -48{,}59 \text{ dB} \quad ; \quad \hat{N} - N \;\hat{=}\; -0{,}19 \text{ dB} \qquad (4.29)$$

$$\hat{S}/\hat{N} \;\hat{=}\; 34{,}76 \text{ dB} \qquad (4.30)$$

Die Meßwerte der Leistungsdichtespektren von Nutzsignal bzw. Störsignal haben eine Standardabweichung von 0,25 dB bzw. 0,28 dB (theor. < 0,39 dB)

Die Abweichung der gemessenen Störleistung beträgt etwa das 2,8-fache der erwarteten Standardabweichung (0,069 dB = 0,39 dB / $\sqrt{32}$), was noch als statistischer Fehler angesehen werden kann.

4.1.2 Rundungsstelle eines rekursiven Filterblocks zweiten Grades

Wählt man als gedächtnisbehaftete Nichtlinearität eine Rundungsstelle in einem digitalen rekursiven Filterblock zweiten Grades in erster kanonischer Form (/ 10 /, Bild 4.1), kann nach Dehner /15/ das Filtersignal r(k) an der Rundungsstelle R an-

gegeben werden. Als Meßobjekt diente ein digitales Filter mit verteilter Arithmetik, wobei die Tafelinhalte aus gerundeten Filterkoeffizienten berechnet wurden /16/, wodurch sich nur eine Rundungsstelle ergibt.

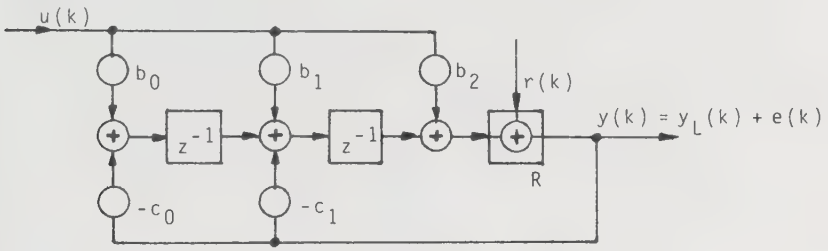


Bild 4.1: Block 2. Grades in 1. kanonischer Form mit einer Rundungsstelle

Bei genügend hoher Aussteuerung ist demnach das Fehlersignal im Quantisierungsintervall Q gleichverteilt, so daß seine Leistung $Q^2/12$ beträgt. Weiterhin besitzt es ein weißes Spektrum und ist zum zu rundenden Signal unkorreliert. Am Ausgang des Blockes tritt das Fehlersignal aufgrund der Rückführung mit der Übertragungsfunktion

$$H_R(z) = 1 \;/\; (z^2 + c_1 z + c_0) \qquad (4.31)$$

gefiltert als Störsignal e(k) auf.

Die Leistungsdichte $\Phi_{ee}(\omega)$ des Störsignals berechnet sich dann zu

$$\Phi_{ee}(\omega) = \Phi_{rr}(\omega) \cdot |H_R(e^{j\omega T_A})|^2$$

$$= \frac{Q^2}{12 \cdot f_A \cdot [4c_0 \cos^2 \omega T_A + 2c_1(1+c_0)\cos\omega T_A + (1-c_0)^2 + c_1^2]}$$

mit $f_A = 1/T_A$ = Abtastfrequenz (4.32)

Gemessen wurde das Rundungsgeräusch für ein konjugiert komplexes Polpaar mit dem Polradius $\rho_\infty = 0{,}95$ und dem Polwinkel $\Omega_\infty = \omega_\infty / f_A = \pm\, 0{,}3\,\pi$ bei einer Rundung auf die Wortlänge $w = 8$. Die Zählerkoeffizienten b_ν wurden so ergänzt, daß sich Allpaßverhalten ergab, um möglichst hoch aussteuern zu können. Die Parameter für Gleichung (4.32) sind dann

$$
\begin{aligned}
Q &= 2^{-7} \\
c_0 &= b_2 = 0{,}902500 \\
c_1 &= b_1 = -\,1{,}116792 \\
b_0 &= 1{,}0 \\
f_A &= 20\ \text{kHz}
\end{aligned}
\qquad (4.33)
$$

In Bild 4.2 ist das theoretische mit dem gemessenen Ergebnis verglichen. Die Abweichungen streuten dabei mit 0,32 dB (theoretisch < 0,39 dB).

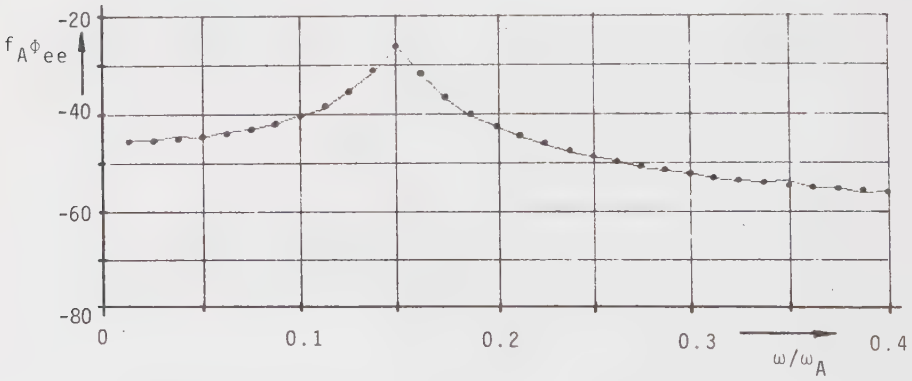


Bild 4.2: Rundungsgeräusch-Leistungsdichte
• theoretische Werte an den Meßpunkten
—— gemessene Werte

4.2 PCM-Systeme

An einem Demonstrationsgerät für Puls-Code-Modulation (PCM) des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik /43/, das aus Sende- und Empfangsteil besteht, wurden die im folgenden vorgestellten Messungen durchgeführt.
Für gauß- und K_0-verteilte Eingangssignale bei linearer und logarithmischer Codierung verschiedener Wortlänge (Bitraten) wurden die Meßergebnisse für PCM und DPCM (differentielle PCM) mit den theoretisch zu erwartenden Werten verglichen.

Die Parameter für die Messungen waren dabei

$N_\Phi = 1024$ $\qquad$ $N_H = 512$
$l = 195$ $\qquad$ $v_H = 4$
$f_A = 20$ kHz $\qquad$ $f_m = n \cdot 100$ Hz; $n = 3...34$

Der Fehler der Leistungsdichtemessung beträgt nach Gleichung (2.85)

$$\varepsilon_\Phi \lessapprox 0{,}0895 \cdot v(S)$$

Damit liegen die Meßwerte mit einer statistischen Sicherheit von 98,7 % innerhalb der Schranken ±1 dB um den wahren Wert.

Der Fehler der Frequenzgangmessung beträgt nach Gleichung (2.88)

$$\varepsilon_H \lessapprox 0{,}01266 \cdot v(S)$$

Damit liegen die Meßwerte für die komplexe Übertragungsfunktion mit einer statistischen Sicherheit von 99,0 % innerhalb eines Kreises mit dem Radius 0,0326 um den wahren Wert.

4.2.1 Lineare PCM

Gegeben ist ein lineare PCM-System nach Bild 4.3, das ein bandbegrenztes analoges Eingangssignal u(t) mit der Abtastrate f_A = 8 kHz in ein Digitalwort wandelt, dieses auf eine Wortlänge w quantisiert und nach einer störungsfrei gedachten Übertragung in das analoge Ausgangssignal y(t) zurückwandelt. Die Quantisierung geschieht durch Abschneiden

der niederwertigen Bits bei einer Darstellung nach Betrag und Vorzeichen sowie durch Begrenzung des Zahlenbereichs auf $\pm (1 - 2^{1-w})$.

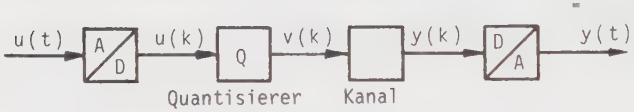


Bild 4.3: Blockschaltbild der linearen PCM

Die A/D- und D/A-Wandlung ergibt zusammen aufgrund der Abtast-Halte-Glieder eine lineare Verzerrung, die mit der Übertragungsfunktion

$$H_L(j\omega) = \frac{\sin \omega/2f_A}{\omega/2f_A} \cdot e^{-j\omega\tau}$$

mit $f_A = 8$ kHz

und $\tau > 1/2\ f_A = 62{,}5\ \mu s$ (4.34)

beschrieben werden kann.

Die Quantisierung ist darstellbar mit einer gedächtnislosen nichtlinearen Kennlinie $f_l(u)$, die für die theoretische Betrachtung auch vor den A/D-Wandler gelegt werden kann.
Das lineare PCM-System läßt sich somit für die weitere Behandlung bei idealem Kanal gemäß Bild 4.4 vereinfachen.

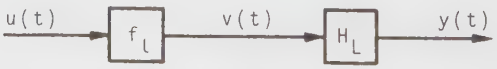


Bild 4.4: vereinfachtes Blockschaltbild der linearen PCM

Für die nichtlineare Kennlinie, die für das Beispiel w = 4 in Bild 4.5 angegeben ist, erhält man die Beziehung

$$f_l(u) = \mathrm{sgn}(u) \sum_{\nu=1}^{2^{w-1}-1} a_\nu \delta_{-1}(|u| - u_\nu)$$

$$\text{mit} \qquad a_\nu = 2^{1-w} \qquad (4.35)$$

$$\text{und} \qquad u_\nu = \nu \cdot 2^{1-w}$$

Die Zwischengröße v(t) läßt sich darstellen als

$$v(t) = f_l(u(t)) = v_{\ddot{a}} \cdot u(t) + e_v(t)$$

mit $v_{\ddot{a}}$ = äquivalente Verstärkung (4.36)

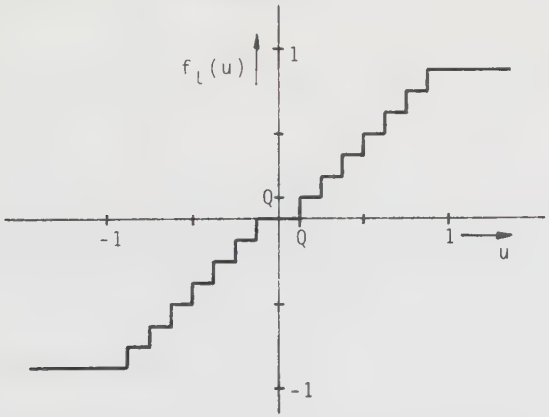


Bild 4.5: Quantisierungskennlinie bei linearer PCM

Die Größe $v_{\ddot{a}}$ wird dabei so ermittelt, daß u(t) und $e_v(t)$ unkorreliert sind. Da das Eingangssignal u(t) eine gerade und damit mittelwertfreie Verteilung besitzen soll, muß nach /5/ gelten:

$$\varphi_{ue_v}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi (f_l(\xi) - v_{\ddot{a}} \cdot \xi) p_u(\xi) d\xi = 0 \qquad (4.37)$$

Daraus erhält man

$$v_{\ddot{a}}(\sigma_u) = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f_L(\xi) p_u(\xi) d\xi \qquad (4.38)$$

Die Signalleistung S_v des im Signal v(t) enthaltenen linearen Anteils ist damit

$$S_v = v_{\ddot{a}}^2 \sigma_u^2 = v_{\ddot{a}}^2 S_u \qquad (4.39)$$

Die Störleistung N_v berechnet sich zu

$$N_v = \sigma_{e_v}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_L(\xi) - v_{\ddot{a}}\xi)^2 p_u(\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_L^2(\xi) p_u(\xi) d\xi - S_v = \sigma_v^2 - S_v \qquad (4.40)$$

Eine Aussage über das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{e_v e_v}(\omega)$ des Störsignals $e_v(t)$ läßt sich zwar formal angeben, aber nur bei "echt" gaußverteiltem Eingangssignal mit durchführbarem Aufwand berechnen. Vergleiche hierzu /22/ bzw. Kapitel 3.2 und 4.1.1.

Zur Bestimmung der Signal- und Störleistung des Ausgangssignals

$$y(t) = y_L(t) + e(t) \qquad (4.41)$$

sind die Leistungsdichtespektren der Signalanteile nötig. Bei einem auf $f_A/2$ = 4 kHz bandbegrenzten Eingangssignal ist auch der Signalanteil $y_L(t)$ des Ausgangssignals bandbegrenzt, und man erhält dann

$$S_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_A/2}^{\omega_A/2} \Phi_{y_L y_L}(\omega) d\omega$$

$$S_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_A/2}^{\omega_A/2} \Phi_{uu}(\omega) v_{\ddot{a}}^2 |H_L(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\leq v_{\ddot{a}}^2 S_u = S_v \qquad (4.42)$$

Dagegen ist der Störanteil $e_v(t)$ nicht bandbegrenzt, so daß durch die Abtastung eine Rückfaltung höherer Frequenzanteile erfolgt. Für die Störleistung erhält man deshalb

$$N_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_A/2}^{\omega_A/2} \Phi_{ee}(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_A/2}^{\omega_A/2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \Phi_{e_\nu e_\nu}(\omega + \nu\omega_A) |H_L(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\leq N_v \qquad (4.43)$$

Die lineare Übertragungsfunktion des nichtlinearen Teils läßt sich mit

$$H_N(j\omega) = v_{\ddot{a}} \qquad (4.44)$$

angeben, da die Kennlinie nicht gedächtnisbehaftet ist. Für die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems erhält man dann mit Gleichung (4.34)

$$H_{PCM}(j\omega) = v_{\ddot{a}} \frac{\sin \omega/2f_A}{\omega/2f_A} e^{-j\omega\tau}$$

mit $f_A = 8$ kHz und $\tau > 62{,}5\mu s$ (4.45)

4.2.1.1 Lineare PCM bei gaußverteiltem Signal

Als Eingangssignal diente ein mit dem in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Modellsignalgenerator erzeugtes gaußverteiltes Signal mit sprachähnlichem Spektrum. Dazu wurde die Multiplikation mit dem tiefpaßgefilterten Signal zur Erzeugung der K_0-Verteilung nicht vorgenommen und zur Bandbegrenzung ein Bandpaß mit der oberen Sperrgrenzfrequenz von 4 kHz nachgeschaltet. Als Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals erhält man einen Verlauf, der zwischen 0,3 kHz und 3,4 kHz dem in Bild 3.16 entspricht.
Die äquivalente Verstärkung $v_{äl}$ (der Index 1 ist eine Kennung der Größen für lineare PCM bei gaußverteiltem Signal) erhält man nach Einsetzen der Gleichung (4.35) in (4.38) bei Gaußverteilung zu

$$v_{äl}(\sigma_u) = \frac{1}{2^w \sigma_u} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{\nu=1}^{2^{w-1}-1} \exp\left(\frac{-2\nu^2}{4^w \sigma_u^2}\right) \tag{4.46}$$

Die Signal- und Störleistungsanteile von v(t) berechnen sich nach den Gleichungen (4.39) und (4.40) :

$$S_{v1}(\sigma_u) = \frac{8}{\pi 4^w} \left\{ \sum_{\nu=1}^{2^{w-1}-1} \exp\left(\frac{-2\nu^2}{4^w \sigma_u^2}\right) \right\}^2 \tag{4.47}$$

$$N_{v1}(\sigma_u) = \frac{4}{4^w} \sum_{\nu=1}^{2^{w-1}-1} (2\nu-1)\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,\nu}{2^w \sigma_u}\right)\right) - S_{v1}(\sigma_u) \tag{4.48}$$

$$= \sigma_{v1}^2(\sigma_u) - S_{v1}(\sigma_u)$$

Bei einem hohen S/N-Verhältnis berechnet sich der Wert N_{v1} als kleine Differenz zweier großer Zahlen, weshalb die Approximationsformel für $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$ für die numerische Auswertung von hoher relativer Genauigkeit sein muß. (Vergleiche Anhang A 10)

Aus den bekannten Übertragungsfunktionen des Filters zur Formung des Spektrums nach Kapitel 3.2.2 und des Tiefpasses zur Bandbegrenzung erhält man das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals. Der Signalleistungsanteil S_y im Ausgangssignal y(t) ist dann mit der Gleichung (4.42)

$$S_{y1} = 0{,}9714 \cdot S_{v1} = 0{,}9714 \cdot v_{\ddot{a}1}^2 \cdot S_{u1} \qquad (4.49)$$

Wird das Spektrum des Störsignals $e_v(t)$ weiß angenommen, berechnet sich die Störleistung N_y am Ausgang mit Gleichung (4.43) zu

$$N_{y1} = 0{,}7737 \cdot N_{v1} \qquad (4.50)$$

Für die lineare Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ gilt die Gleichung (4.45):

$$H_{PCM,1}(j\omega) = v_{\ddot{a}1} \frac{\sin \omega/2f_A}{\omega/2f_A} e^{-j\omega\tau}$$

mit $f_A = 8$ kHz und $\tau > 62{,}5$ µs

Aus den Meßergebnissen für die Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}$ und $\hat{\Phi}_{nn}$ und der Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ wurden die Werte für $\hat{v}_{\ddot{a}1}$, $\hat{S}_{y1}$ und $\hat{N}_{y1}$ ermittelt und mit den nach den Gleichungen (4.45) bis (4.50) berechneten Werten verglichen.
Im Bild 4.6 ist der berechnete Signalrauschabstand S_y/N_y mit dem gemessenen $\hat{S}_y/\hat{N}_y$ in Abhängigkeit von der Aussteuerung σ_u und der Wortlänge w verglichen. Die Abweichungen zwischen Meßergebnissen und den berechneten Werten liegen im Rahmen der erwarteten Meßgenauigkeit von 1 dB.

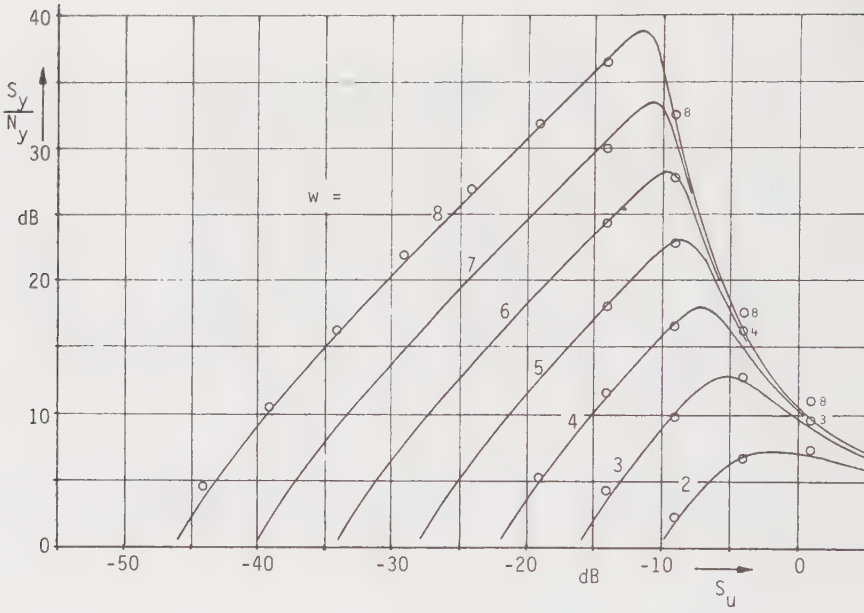


Bild 4.6: SNR bei lineare PCM und gaußverteiltem Signal
—— theoretischer Verlauf
o Meßwerte

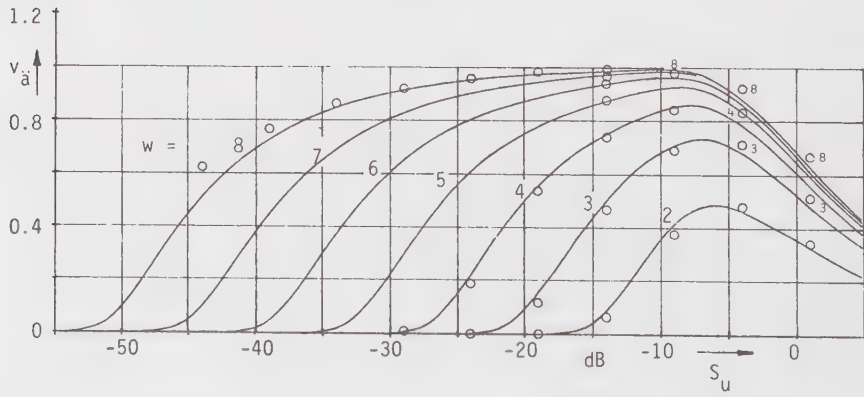


Bild 4.7: Äquivalente Verstärkung bei linearer PCM und gaußverteiltem Signal
—— theoretischer Verlauf
o Meßwerte

Die gemessene Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ besitzt im Rahmen der Meßgenauigkeit von 0,033 den nach Gleichung (4.45) berechneten Verlauf. Die aus der Messung ermittelte äquivalente Verstärkung $\hat{v}_{äl}$ ist im Bild 4.7 mit der berechneten verglichen.

Im Bild 4.8 sind für die Wortlänge w = 8 die gemessenen Leistungsdichtespektren des Ausgangssignals $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und des Störsignals $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ für drei typische Aussteuerungen wiedergegeben.
Bei etwa optimaler Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 14 dB) hat das Störleistungsdichtespektrum in etwa einen $\frac{\sin x}{x}$ -förmigen Verlauf entsprechend der Abtastfrequenz 8 kHz, d. h. das durch die Quantisierung entstehende Störgeräusch $e_v(t)$ hat etwa "weißes" Spektrum. (Man beachte die stark gestauchte halblogarithmische Darstellung.)
Bei Übersteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ -4 dB) steigt die Störleistung stark an. Das Störsignal hat eine deutliche spektrale Färbung, wobei der Frequenzbereich von 0,7 kHz bis 1,5 kHz dominiert. Bei Vergleich mit dem Signalspektrum, wo die maximale spektrale Lei stungsdichte bei 0,3 kHz bis 0,5 kHz liegt (vergleiche Bild 3.16), befindet sich die maximale Leistungsdichte des Störsignals bei um Faktor drei höheren Frequenzen. Dies entspricht der bekannten Tatsache, daß bei Übersteuerung mit einer Sinusfunktion die dritte Harmonische in der Störung überwiegt.
Bei sehr geringer Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ -44 dB) hat die Leistung des Störgeräusches aufgrund der konstanten Quantisierungsstufen über den Aussteuerungsbereich in etwa die Größe wie bei optimaler Aussteuerung. Im Bereich geringer spektraler Leistungsdichte des Eingangssignals dominiert das Störgeräusch im Ausgangssignal, hier oberhalb von etwa 1 kHz.
Das Störgeräusch ist aufgrund der Abhängigkeit vom Eingangssignal (es werden nur etwa ± 2 Quantisierungsstufen angesteuert) spektral eingefärbt.

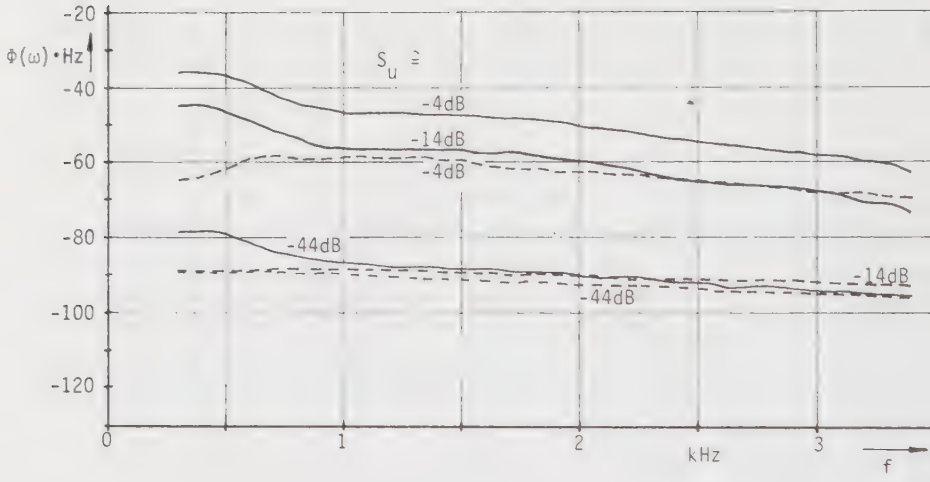


Bild 4.8: Leistungsdichtespektren bei linearer PCM und gaußverteiltem Signal bei w = 8

—— Ausgangssignal

---- Störsignal

4.2.1.2 Lineare PCM bei K_0-verteiltem Signal

Als Eingangssignal diente ein mit dem in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Modellsignalgenerator erzeugtes K_0-verteiltes Signal mit sprachähnlichem Spektrum. Die Bandbegrenzung auf 0,3 bis 3,4 kHz erfolgte wie im letzten Kapitel mit einem nachgeschalteten Bandpaß.

Setzt man die Verteilungsdichte

$$p_u(\xi) = \frac{1}{\pi\sigma_u} K_0\left(\frac{|\xi|}{\sigma_u}\right) \tag{4.51}$$

des Eingangssignals direkt in die Gleichungen (4.38) und (4.40) zur Berechnung der äquivalenten Verstärkung und der Signal- und Störleistungsanteile ein, lassen sich die Integrale zwar mit Hilfe von modifizierten Bessel- und modifizierten Struve- Funktionen bzw. Meijer'schen G-Funktionen geschlossen angeben /44/, die numerische Auswertung bleibt jedoch aufwendig. Nutzt man hingegen die Tatsache, daß das K_0-verteilte Eingangssignal das Produkt zweier gaußverteilter Signale ist, so kann man durch Zuhilfenahme der Gleichung (3.4) auf vorhandene Ergebnisse zurückgreifen.

Aus Gleichung (3.4) erhält man

$$p_u(\xi) = \frac{1}{2\pi\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|r|} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_u^2} - \frac{\xi^2}{2r^2}\right) dr \tag{4.52}$$

Setzt man dieses Integral mit der Gleichung (4.35) in (4.38) ein, erhält man für die äquivalente Verstärkung $v_{ä2}$ (der Index 2 ist die Kennung der Größen für lineare PCM bei K_o-verteiltem Signal)

$$v_{ä2}(\sigma_u) = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(\xi) \frac{1}{2\pi\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2} + \frac{-\xi^2}{2r^2} \right) \frac{dr}{|r|}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}|r|} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f_L(\xi) \exp\left(\frac{-\xi^2}{2r^2} \right) d\xi \right] \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2} \right) dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u^3} \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 \cdot v_{ä1}(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^3} \right) dr \qquad (4.53)$$

mit $v_{ä1}$ nach Gleichung (4.46) .

Der Signalleistungsanteil wird dann

$$S_{v2}(\sigma_u) = v_{ä2}^2 \cdot \sigma_u^2 \qquad (4.54)$$

und der Störleistungsanteil mit den Gleichungen (4.35), (4.40) und (4.52) letzlich zu

$$N_{v2}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{v1}^2(|r|)\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right)dr - S_{v2}^2(\sigma_u)$$

$$= \sigma_{v2}^2(\sigma_u) - S_{v2}(\sigma_u)$$

mit σ_{v1} nach Gleichung (4.48) (4.55)

Die numerische Berechnung des Wertes N_{v2} nach Gleichung (4.55) kann - wie bei Gleichung (4.48) - Genauigkeitsprobleme aufwerfen, da die Funktion 1-erf(x) = erfc(x) approximiert wird und zudem ein Integral ermittelt werden muß. (Vergleiche Anhang A 10)

Da das K_o-verteilte Eingangssignal die gleiche spektrale Verteilung wie das gaußverteilte Signal im vorigen Kapitel besitzt, gelten auch hier die Zusammenhänge (4.49) und (4.50) für das Ausgangssignal,

$$S_{y2} = 0{,}9714 \cdot S_{v2} = 0{,}9714 \cdot v_{ä2}^2 \cdot S_{u2} \qquad (4.56)$$

$$N_{y2} = 0{,}7737 \cdot N_{v2} \quad , \qquad (4.57)$$

sowie entsprechend die Gleichung (4.45) für die lineare Übertragungsfunktion :

$$H_{PCM,2}(j\omega) = v_{ä2} \frac{\sin \omega/2f_A}{\omega/2f_A} e^{-j\omega\tau} \qquad (4.58)$$

mit f_A = 8 kHz und $\tau >$ 62,5 µs .

Beim Vergleich der Meßergebnisse mit den berechneten Werten ist im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Gaußverteilung keinerlei Zusammenhang festzustellen, die Messung liefert völlig andere Ergebnisse als die Theorie.

Um die Meßergebnisse rechnerisch nachvollziehen zu können, wird folgender Ansatz gemacht:
Gemäß der Erzeugung wird das K_0-verteilte Signal u(t) als gaußverteiltes Signal betrachtet, dessen Streuung $|r_8|$ sich "langsam" ändert (vergleiche Kapitel 3.2.2). Die Streuung ist einseitig gaußverteilt mit dem quadratischen Mittelwert σ_u^2. Weiterhin wird angenommen, daß in der Bandlücke im Durchlaßbereich des Bandpasses die momentanen Signaleigenschaften (Störleistungsdichte bzw. Amplitude des Sinussignals) denen gleich sind, die sich bei gaußverteiltem Signal u(t) ergeben, wenn die Streuung des gaußverteilten Signals gleich dem momentanen Wert $|r_8|$ ist. Diese Annahme wird weiter unten anschaulich zu erklären versucht. Durch die nachfolgende Mittelung bei der Meßwertbildung lassen sich dann die Meßergebnisse für das K_0-verteilte Signal als mit der Verteilungsdichte der Streuung gewichtete Mittelung der Meßergebnisse bei gaußverteiltem Signal annehmen.

Da das K_0-verteilte Signal praktisch die gleiche spektrale Verteilung besitzt wie das gaußverteilte, bleiben die leistungsmäßigen Zusammenhänge der Signale v_2 und y_2 erhalten (Gleichungen (4.56) und (4.57)), so daß die Betrachtung des Signals v_2 genügt.

Die Leistung σ_{v2}^2 des Signals v_2 ist nach Gleichung (4.55) bereits die gewichtete Mittelung über die Leistung σ_{v1}^2 des gaußverteilten Signals. Dagegen ergibt sich für die gemessene Nutzleistung S_{v2} die Beziehung

$$\tilde{S}_{v2}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v1}(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right) dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\ddot{a}1}^2(|r|) \cdot r^2 \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right) dr$$

$$\neq S_{v2}(\sigma_u) \qquad (4.59)$$

mit S_{v1} bzw. $v_{\ddot{a}1}$ nach Gleichung (4.47) bzw. (4.46).
Dabei erhält man

$$N_{v2}(\sigma_u) = \sigma_{v2}^2(\sigma_u) - S_{v2}(\sigma_u) \neq N_{v2}(\sigma_u) \qquad (4.60)$$

mit σ_{v2} nach Gleichung (4.55).

Benötigt man die äquivalente Verstärkung $v_{\ddot{a}2}$ zur Bestimmung der linearen Übertragungsfunktion $H(j\omega)$, so ist $v_{\ddot{a}1}$ direkt zu mitteln:

$$\tilde{v}_{\ddot{a}2}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\ddot{a}1}(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right) dr \neq v_{\ddot{a}2}(\sigma_u) \qquad (4.61)$$

Beim Vergleich mit Gleichung (4.59) ist sofort ersichtlich, daß die Beziehung (4.39) hier keine Gültigkeit besitzt:

$$\tilde{v}_{\ddot{a}2}^2 \neq \frac{\tilde{S}_{v2}}{\sigma_u^2} \neq v_{\ddot{a}2}^2 \qquad (4.62)$$

Bei den so berechneten Werten ergibt sich eine bessere Übereinstimmung mit den Meßergebnissen (siehe unten).

Aufgrund der erheblichen Abweichungen zwischen Theorie und Messung stellen sich zwei Fragen:

- Worin besteht der Unterschied zwischen dem "theoretischen" Störsignal und dem durch gewichtete Mittelung über das Störsignal bei Gaußverteilung gewonnene?
- Warum erfaßt das Meßsystem gerade die anschaulich scheinbar richtigen Werte gemäß des oben gemachten Ansatzes ?

Rein anschauliche Antworten auf diese Fragen werden anhand des folgenden Ansatzes versucht, ein Beweis der dabei gemachten Thesen wird nicht angestrebt.

Betrachtet wird das gaußverteilte Signal $r_7(t)$ vor der Multiplikation mit dem langsam veränderlichen Signal $r_8(t)$ als Addition unendlich vieler statistisch unabhängiger Spektrallinien.

Es sei nun $r_8(t) = \sigma_u$ konstant, d. h. das Signal u(t) ist gaußverteilt. Beim Durchlaufen der Nichtlinearität entsteht ein Störsignal, das aus Mischprodukten der einzelnen Spektrallinien besteht. Dieses Störsignal wird vom Meßsystem richtig erfaßt.

Es sei jetzt $r_8(t)$ eine langsam veränderliche gaußverteilte Größe, d. h. das Signal u(t) ist K_o-verteilt. Durch die Modulation entstehen zu jeder Spektrallinie Seitenbänder, die Bandbreite der so entstehenden Schmalbandgeräusche entspricht der des modulierenden Signals. Das Störsignal, das jetzt aufgrund der Nichtlinearität entsteht, besteht zum einen aus Mischprodukten der einzelnen Schmalbandgeräusche und zusätzlich aus Seitenbändern zu den Schmalbandgeräuschen.
Die Mischprodukte sind über den gesamten Frequenzbereich verteilt und fallen damit wie beim gaußverteilten Signal auch in die Bandlücke. Akustisch wird dieses Signal als ein für Mischprodukte typisches "Klirren" wahrgenommen.

Dagegen ist die Bandbreite der "Störseitenbänder" entsprechend der geringen Bandbreite der "Nutz"-Schmalbandgeräusche so gering, daß sie nur unwesentlich in die Bandlücke hineinreichen und somit von der Messung nicht erfaßt werden. (3-dB-Bandbreite des Nutzschmalbandgeräusches nach Kapitel 3.2.2: 21,4 Hz , 3-dB-Durchlaßbandbreite der Bandsperre ca. 220 Hz). Die verzerrten Schmalbandgeräusche lassen sich als modulierte Spektrallinien des Signals $r_7(t)$ auffassen, wobei das modulierende Signal nicht mehr dem gaußverteilten Signal $r_8(t)$ gleich ist. Da die Bandbreite des so gedachten modulierenden Signals sehr gering ist, wird deshalb akustisch nur eine rasche Pegeländerung aber keine Verzerrung wahrgenommen.

Das Meßsystem erfaßt hier nur die akustisch wahrnehmbaren Verzerrungen und nicht die theoretisch entstandenen, d. h. bei dem K_0-verteiltem Signal ist die Messung des Signalrauschabstandes zwar nicht objektiv dafür aber subjektiv richtig.

Für die Abweichungen bei der Frequenzgangmessung wurde keine Veranschaulichung gefunden.

Die Meßergebnisse für die Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ und der Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ bei K_0-Verteilung haben einen weniger "glatten" Verlauf als bei Gaußverteilung, d. h. die Streuung der einzelnen Meßwerte ist größer als nach den Genauigkeitsberechnungen in Kapitel 2 zu erwarten ist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sich der Effektivwert des als moduliertes gaußverteiltes Signal betrachtete Meßsignal relativ langsam ändert, wodurch bei gleicher Genauigkeit eine größere Mittelungsdauer T notwendig wäre.

Im Bild 4.9 ist der aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}$ und $\hat{\Phi}_{nn}$ ermittelte Signalrauschabstand $\hat{S}_{y2}/\hat{N}_{y2}$ in Abhängigkeit von der Aussteuerung σ_{u2} und der Wortlänge w mit dem theoretischen Ergebnis S_{y2}/N_{y2} nach den Gleichungen (4.54) bis (4.57) verglichen. Zusätzlich ist der Signalrauschabstand $\tilde{S}_{y2}/\tilde{N}_{y2}$, der sich bei Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung nach den Gleichungen (4.59) und (4.60) ergibt, eingezeichnet. Zu erkennen ist die starke Abweichung der Meßwerte von dem theoretischen Verlauf, vor allem im Bereich stärkerer Übersteuerung.

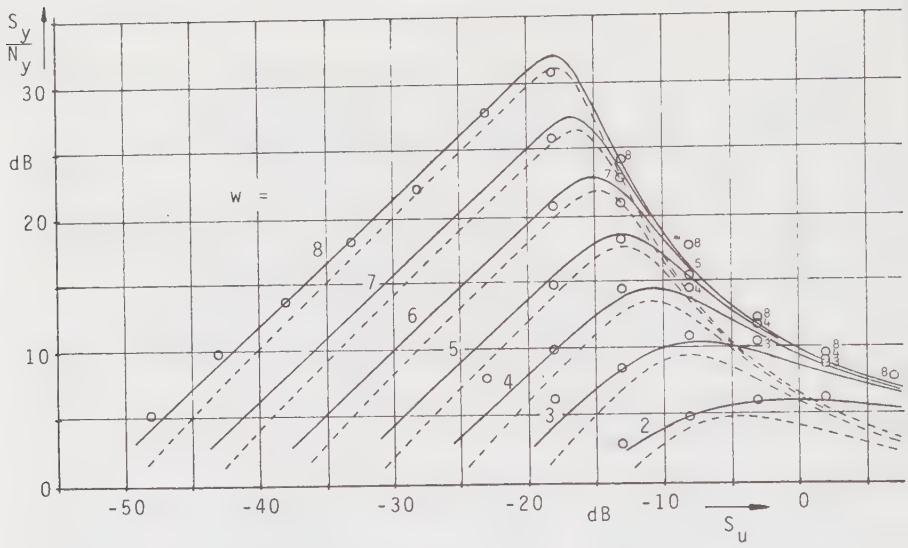


Bild 4.9 : SNR bei linearer PCM und K_0-verteiltem Signal
--- theoretische Verlauf
—— Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung
O Meßwerte

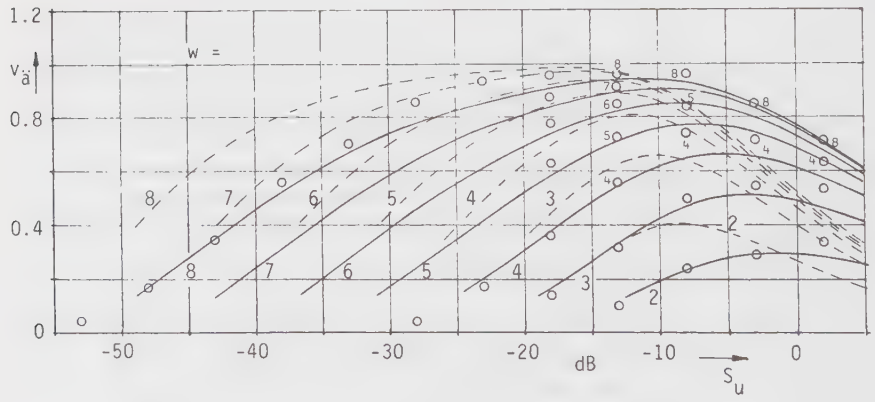


Bild 4.10 : Äquivalente Verstärkung bei linearer PCM und K_0-verteiltem Signal
--- theoretischer Verlauf
—— Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung
O Meßwerte

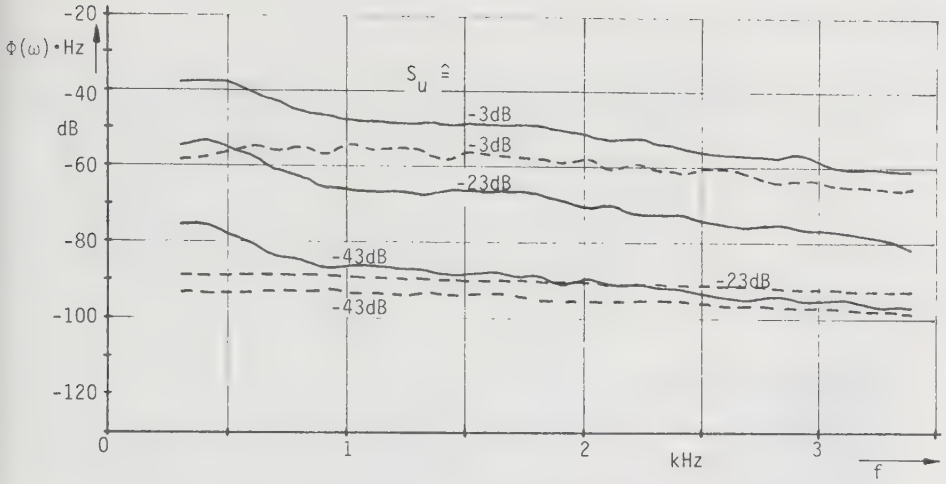


Bild 4.11 : Leistungsdichtespektrum bei linearer PCM und K_o-verteiltem Signal bei w = 8
—— Ausgangssignal
--- Störsignal

Im Bild 4.10 ist die aus der gemessenen Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ ermittelte äquivalente Verstärkung $\hat{v}_{ä2}$ mit dem theoretischen Ergebnis $v_{ä2}$ nach Gleichung (4.53) und dem aus dem Ergebnis bei Gaußverteilung gemittelten Wert $\tilde{v}_{ä2}$ nach Gleichung (4.61) verglichen. Zu erkennen ist außer der starken Abweichung zwischen Theorie und Messung, daß die gemessenen Werte i. a. etwas höher liegen als die gerechneten. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, daß durch die Einfügung des Sinussignals eine Grundaussteuerung der Nichtlinearität erfolgt, d. h. die Singularität der Verteilungsdichte bei Null abgeschwächt wird.

Im Bild 4.11 sind für die Wortlänge w = 8 die gemessenen Leistungsdichtespektren des Ausgangssignals $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und des Störsignals $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ für drei Aussteuerungen wiedergegeben. Die Meßergebnisse für Übersteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 3 dB), optimale Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 23 dB) und geringer Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 43 dB) sind den Verläufen bei Gaußverteilung sehr ähnlich, weshalb auf die Diskussion zum Bild 4.8 verwiesen wird.

4.2.2 Logarithmische PCM

Während bei der linearen PCM die Störleistung N_y unterhalb der Übersteuerungsgrenze nahezu unabhängig von der Aussteuerung ist und damit der Signal-Rausch-Abstand proportional zur Signalleistung ist, ist es für die Signalübertragung sinnvoll, einen konstanten Signal-Rausch-Abstand zu haben, der unabhängig von der Signalverteilung und damit speziell unabhängig von der Aussteuerung ist. Die theoretische Lösung hierzu ist eine Kompressionskennlinie

$$f_K(u) = f_K(1) + \frac{1}{K} \ln(u) \quad , \tag{4.63}$$

die einem linearen PCM-System vorgeschaltet ist /43/, /48/ . Diese Kennlinie ist jedoch nur für u > 0 definiert und geht zudem nicht durch den Nullpunkt. Bei der praktischen Realisierung wird am häufigsten die 13-Segment-Kennlinie verwendet (Bild 4.13), die durch stückweise Linearisierung aus der Kompressionskennlinie (4.63) hervorgeht. Sie ist nach der A/D-Wandlung angeordnet, da sie sich durch digitale Verarbeitung exakt darstellen läßt.

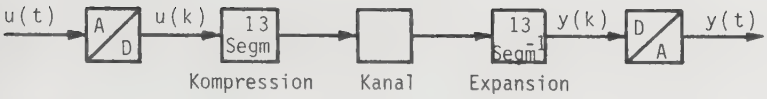


Bild 4.12.: Blockschaltbild der logarithmischen PCM

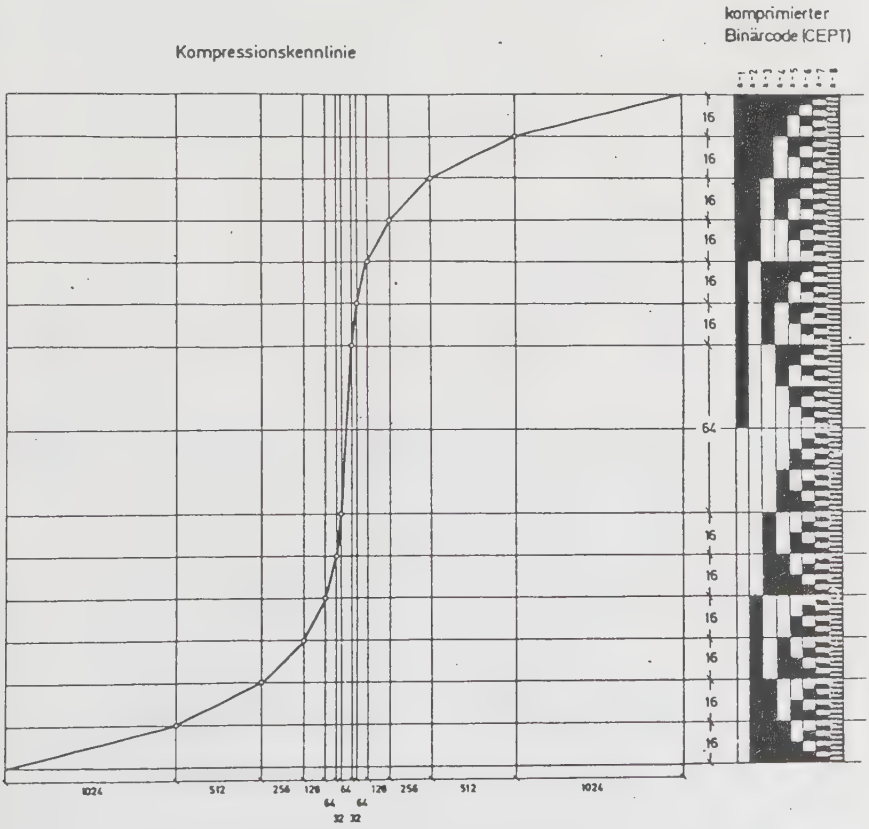


Bild 4.13: 13-Segment-Kennlinie mit zugehörigem Code

In Bild 4.12 ist das Blockschaltbild der logarithmischen PCM dargestellt, das sich bei fehlerfrei gedachter Übertragung durch den Kanal wie bei linearer PCM (Kapitel 4.2.1) vereinfachen läßt. Dabei wird die Kompression durch die 13-Segment-Kennlinie mit der dabei erfolgenden Quantisierung und die Expansion mit der Inversen der 13-Segment-Kennline zusammengefaßt und vor die A/D-Wandlung gezogen. Das sich ergebende vereinfachte Blockschaltbild ist in Bild 4.14 dargestellt und identisch mit dem der linearen PCM (Bild 4.4), so daß nach Austausch der Quantisierungskennlinie $f_L(u)$ gegen $f_{13}(u)$ die entsprechenden Gleichungen der linearen PCM gültig sind.

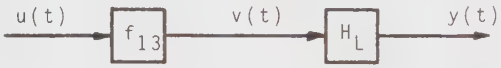


Bild 4.14: vereinfachtes Blockschaltbild der logarithmischen PCM

Die lineare Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ ist in Gleichung (4.34) definiert, und für die in Bild 4.15 dargestellte Quantisierungskennlinie $f_{13}(u)$ erhält man folgende Beziehung für $w \geq 4$

$$f_{13}(u) = \mathrm{sgn}(u) \cdot \sum_{\nu=1}^{2^{w-1}-1} a_\nu \delta_{-1}(|u| - u_\nu)$$

mit

$$a_\nu = \begin{cases} 2^{-w-3} & \text{für } \nu = 1(1)2^{w-4} \\ 2^{\mu-w-4} & \text{für } \nu = (1(1)2^{w-4}) + \mu \cdot 2^{w-4} \\ & \quad \mu = 1(1)6 \\ 2^{3-w} & \text{für } \nu = (1(1)2^{w-4}-1) + 7 \cdot 2^{w-4} \end{cases} \qquad (4.64\ a)$$

und

$$u_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda$$

Für w = 3 entartet die Kennlinie, da nur jedes zweite Segment angesprochen wird. Die Amplitudenstufen u_ν sind dann

$$u_\nu = 4^{\nu-4} \quad ; \qquad \nu = 1, 2, 3$$

und $$a_\nu = 1/64, 3/64, 3/16 \quad ; \quad \nu = 1, 2, 3 \qquad (4.64\ b)$$

Bei w = 2 erhält man

$$f_{13}(u) = \mathrm{sgn}(u) \cdot \frac{1}{16} \cdot \delta_{-1}(|u| - \frac{1}{16}) \qquad (4.64\ c)$$

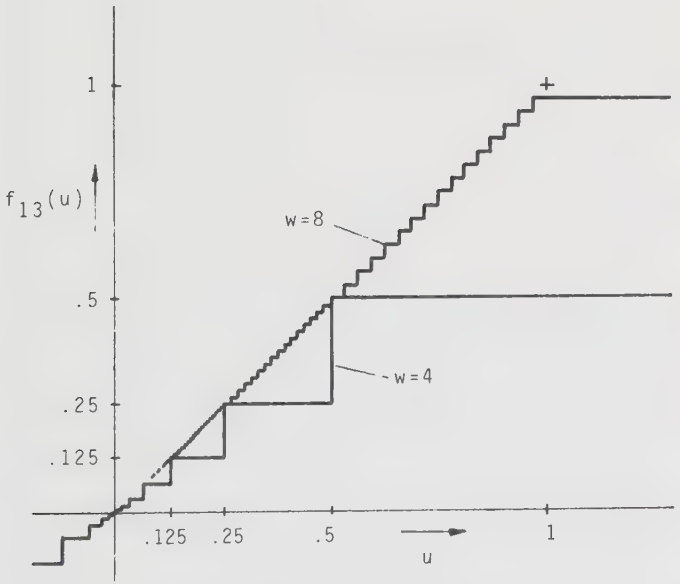


Bild 4.15: Quantisierungskennlinie bei logarithmischer PCM für w = 4 und w = 8

4.2.2.1 Logarithmische PCM bei gaußverteiltem Signal

Das verwendete Eingangssignal hat die selben Eigenschaften wie das bei linearer PCM in Kapitel 4.2.1.1 .
Aus den Gleichung (4.38) und (4.64) erhält man bei gaußverteiltem Eingangssignal für die äquivalente Verstärkung $v_{ä3}$ (der Index 3 ist eine Kennung der Größen für logarithmische PCM bei gaußverteiltem Signal)

$$v_{ä3}(\sigma_u) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_u}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sum_{\nu=1}^{2^{w-3}} 2^{-3-w}\exp\left(\frac{-\nu^2}{2\cdot 4^{w+3}\sigma_u^2}\right) + \right. \\ + \sum_{u=-2}^{+2}\sum_{\nu=2^{w-4}+1}^{2^{w-3}} 2^{\mu-w}\exp\left(\frac{-\nu^2}{2\cdot 4^{w-\mu}\sigma_u^2}\right) + \\ \left. + \sum_{\nu=2^{w-4}+1}^{2^{w-3}-1} 2^{3-w}\exp\left(\frac{-\nu^2}{2\cdot 4^{w-3}\sigma_u^2}\right)\right] \\ \text{für } w \geq 4 \\ \frac{1}{32\sqrt{2\pi}\sigma_u}\left[\exp\left(\frac{-1}{8192\sigma_u^2}\right) + 3\exp\left(\frac{-1}{512\sigma_u^2}\right) + \right. \\ \left. + 12\exp\left(\frac{-1}{32\sigma_u^2}\right)\right] \quad \text{für } w = 3 \\ \frac{1}{8\sqrt{2\pi}\sigma_u}\exp\left(\frac{-1}{512\sigma_u^2}\right) \quad \text{für } w = 2 \end{cases} \tag{4.65}$$

Der Signalleistungsanteil S_{v3} nach Gleichung (4.39) ist dann

$$S_{v3}(\sigma_u) = v_{ä3}^2(\sigma_u) \cdot \sigma_u^2 \tag{4.66}$$

Der Störleistungsanteil N_{v3} berechnet sich entsprechend den Gleichungen (4.40) und (4.64)

$$N_{v3} = \sigma_{v3}^2 - S_{v3} \tag{4.67}$$

mit

$$\sigma_{v3}^2(\sigma_u) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{2^{w-3}} (2\nu-1)4^{-3-w}\operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}\cdot 2^{w+3}\sigma_u}\right) + \\ + \sum_{\nu=-2}^{+2} \sum_{\nu=2^{w-4}+1}^{2^{w-3}} (2\nu-1)4^{\mu-w}\operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}\cdot 2^{w-\mu}\sigma_u}\right) + \\ + \sum_{\nu=2^{w-4}+1}^{2^{w-3}-1} (2\nu-1)4^{3-w}\operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}\cdot 2^{w-3}\sigma_u}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } w \geq 4 \\ \frac{1}{4096}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 64\cdot\sigma_u}\right) + 15\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 16\cdot\sigma_u}\right) + \right. \\ \left. + 240\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sigma_u}\right)\right) \qquad \text{für } w = 3 \\ \frac{1}{256}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}\sigma_u}\right) \qquad \text{für } w = 2 \end{cases} \tag{4.68}$$

Wie in den vorigen Kapiteln gelten auch hier die Zusammenhänge (4.45), (4.49) und (4.50) zwischen den Signalen $v_3(t)$ und $y_3(t)$ bezüglich der linearen Übertragungsfunktion und den Stör- und Signalleistungsanteilen.

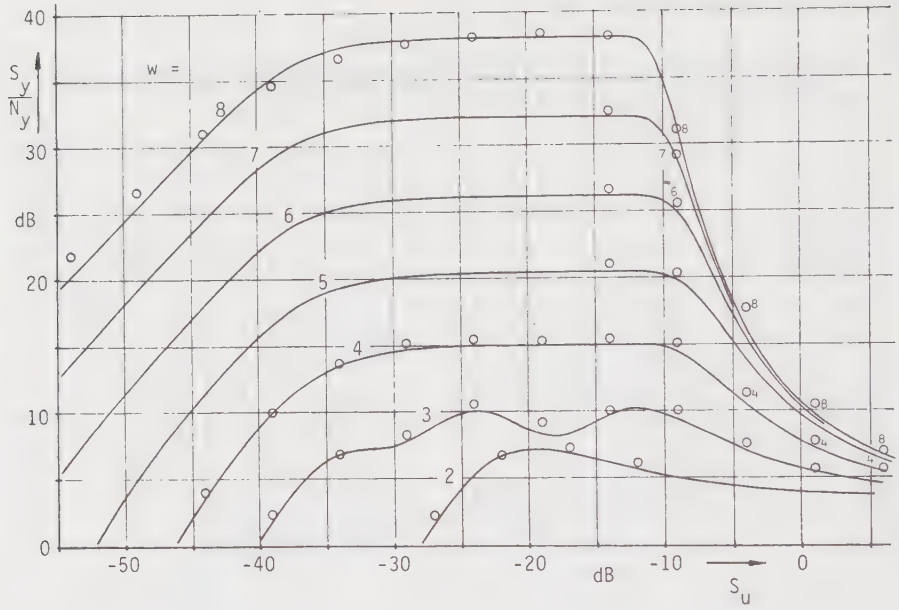


Bild 4.16 : SNR bei logarithmischer PCM und gaußverteiltem Signal

—— theoretischer Verlauf

o Meßwerte

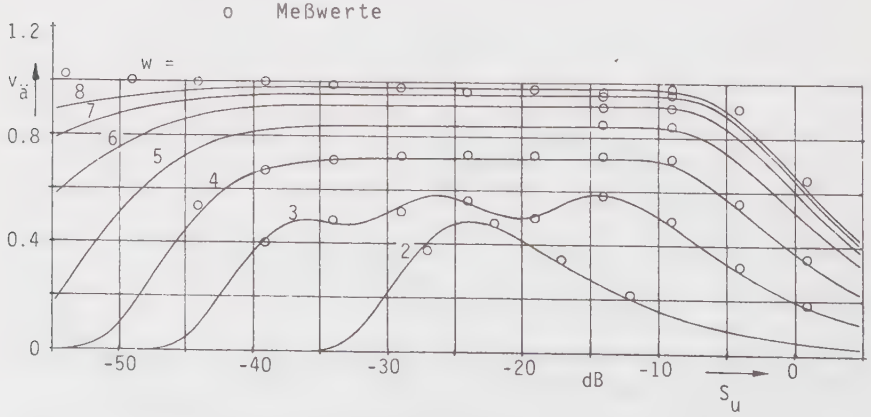


Bild 4.17 : Äquivalente Verstärkung bei logarithmischer PCM und gaußverteiltem Signal

—— theoretischer Verlauf

o Meßwerte

In Bild 4.16 ist das aus den gemessenen Leistungsdichtesprektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelte Signalrauschverhältnis $\hat{S}_{y3}/N_{y3}$ mit dem theoretischen Verlauf S_{y3}/N_{y3} verglichen. Die Abweichungen liegen im Rahnen der Meßgenauigkeit, mit Ausnahme des Bereichs geringer Aussteuerung bei der Wortlänge w = 8 . Durch die 13-Segment-Kennlinie wird bei geringer Aussteuerung die Quantisierung um 4 bit verkleinert, d. h. die Übertragung geschieht mit der Auflösung der vor- bzw. nachgeschalteten 12-bit-A/D- bzw. -D/A-Wandler. Deshalb geschieht im mittleren Segment kein Betragsabschneiden wie für die Berechnung vorausgesetzt sondern die von den Wandlern vorgegebene Rundung, was das Signalrauschverhältnis und auch die äquivalente Verstärkung (vergleiche Bild 4.17) in diesem Bereich erhöht.

Beim Vergleich mit dem in /48/ Seite 359 angegebenen Ergebnis (Bild 10.21) erhält man mit Ausnahme des Übersteuerungsbereichs eine gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen.

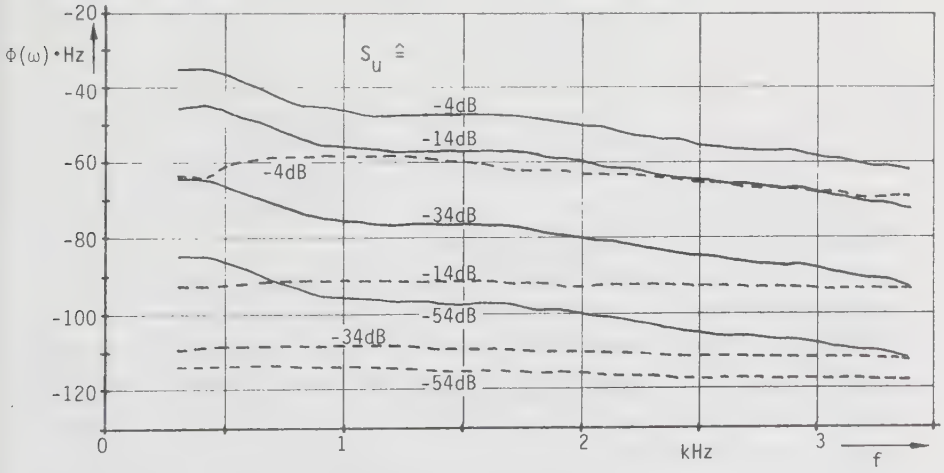


Bild 4.18 : Leistungsdichtespektrum bei logarithmischer PDM und gaußverteiltem Signal vis w = 8

—— Ausgangssiganl

--- Störsignal

Im Bild 4.17 ist die aus der gemessenen Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ ermittelte äquivalente Verstärkung $\hat{v}_{ä3}$ zusammen mit dem theoretischen Verlauf eingetragen. Die Abweichungen liegen im Rahmen der Meßgenauigkeit mit Ausnahme des Bereichs geringer Aussteuerung bei w = 8 .

Im Bild 4.18 sind gemessene Leistungsdichtespektrum $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ bei einer Wortlänge von w = 8 für verschiedene Aussteuerungen gezeigt. Bei Übersteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 4 dB) ergibt sich der gleiche Verlauf wie bei linearer PCM (vergleiche Bild 4.8).

Im Bereich optimaler Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 14 dB bis - 34 dB, vergleiche Bild 4.16) besitzt das Störleistungsdichtespektrum ein schwach ausgeprägtes Maximum bei etwa 1,2 kHz, d. h. das durch die Quantisierung entstehende Störgeräusch $e_v(t)$ hat wegen der Segmentübergänge ein nicht ganz weißes Spektrum.

Bei geringer Aussteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 54 dB) sinkt die Leistung des Störgeräusches nur wenig mit der Signalleistung, da die Quantisierungsstufen in diesem Bereich konstant sind.

4.2.2.2 Logarithmische PCM bei K_0-verteiltem Signal

Das verwendete Eingangssignal hat die selben Eigenschaften wie das bei linearer PCM in Kapitel 4.2.1.2 .
Aus den Gleichung (4.38), (4.52) und (4.64) erhält man die äquivalente Verstärkung $v_{ä4}$ (der Index 4 ist die Kennung der Größen für logarithmische PCM bei K_0-verteiltem Signal) aus der äquivalenten Verstärkung $v_{ä3}$ für gaußverteiltes Signal nach Gleichung (4.65):

$$v_{ä4}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u^3} \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 v_{ä3}(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right) dr \qquad (4.69)$$

Der Signalleistungsanteil wird dann

$$S_{v4}(\sigma_u) = \sigma_u^2 \cdot v_{ä4}^2(\sigma_u) \quad . \tag{4.70}$$

Der Störleistungsanteil

$$N_{v4} = \sigma_{v4}^2 - S_{v4} \tag{4.71}$$

ermittelt sich aus dem Wert σ_{v4}^2 nach den Gleichungen (4.40), (4.52) und (4.68)

$$\sigma_{v4}^2(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{v3}^2(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u^2}\right) dr \tag{4.72}$$

Für das Ausgangssignal $y_4(t)$ gelten die Beziehungen

$$S_{y4} = 0{,}9714 \cdot S_{v4} \tag{4.73}$$

$$N_{y4} = 0{,}7737 \cdot N_{v4} \tag{4.74}$$

und die Übertragungsfunktion ist

$$H_{PCM,4}(j\omega) = v_{ä4} \frac{\sin\omega/2f_A}{\omega/2f_A} e^{-j\omega\tau} \tag{4.75}$$

mit f_A = 8 kHz und $\tau > 62{,}5$ µs wie in den letzten Kapiteln.

Beim Vergleich der Meßergebnisse mit den berechneten Werten erkennt man wie bei linearer PCM bei K_o-verteiltem Signal keinerlei Übereinstimmung (vergleiche Kapitel 4.2.1.2).

Um die Meßergebnisse rechnerisch nachzuvollziehen, wird das Meßsignal als "langsam" moduliertes Gaußsignal betrachtet, woraus sich folgende Beziehungen (entsprechend Kapitel 4.2.1.2) ableiten:

$$\tilde{S}_{v4}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\ddot{a}3}{}^2(|r|) \cdot r^2 \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u{}^2}\right) dr \neq S_{v4}(\sigma_u) \tag{4.76}$$

$$\tilde{N}_{v4}(\sigma_u) = \sigma_{v4}{}^2(\sigma_u) - \tilde{S}_{v4}(\sigma_u) \neq N_{v4}(\sigma_u) \tag{4.77}$$

$$\tilde{v}_{\ddot{a}4}(\sigma_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\ddot{a}3}(|r|) \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma_u{}^2}\right) dr \neq v_{\ddot{a}4}(\sigma_u) \tag{4.78}$$

mit $$\tilde{v}_{\ddot{a}4}{}^2 \neq \frac{S_{v4}}{\sigma_u{}^4} \neq v_{\ddot{a}4}{}^2 \tag{4.79}$$

Im Bild 4.19 ist das aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelte Signalrauschverhältnis $\hat{S}_{y4}/\hat{N}_{y4}$ mit dem theoretischen Verlauf S_{y4}/N_{y4} nach Gleichung (4.70) bis (4.74) verglichen. Der Signalrauschabstand, der sich bei Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung nach Gleichung (4.76) und (4.77) ergibt, ist ebenfalls eingezeichnet. Zu erkennen ist die starke Abweichung der Meßwerte vom theoretischen Verlauf, während das Verhältnis $\tilde{S}_{y4}/\tilde{N}_{y4}$ eine näherungsweise Übereinstimmung mit den Meßwerten besitzt.
Im Bereich optimaler Aussteuerung, d. h. etwa konstantem Signalrauschabstandes unterscheidet sich das theoretische Ergebnis praktisch nicht von dem gemittelten. Vergleicht man weiter das Ergebnis für gaußverteiltes Signal (Bild 4.16) und das in /49/ durch Simulation gewonnene Ergebnis für Laplaceverteilung, erkennt man etwa gleich große Signalrauschabstände (z. B. ca. 38 dB bei w = 8) unabhängig von der Verteilung. Dies bestätigt die Theorie, wonach eine logarithmische Kompressionskennlinie zu einem konstanten Signalrauschabstand unabhängig von der Verteilung führt.

Im Bild 4.20 ist die aus der gemessenen Übertragungsfunktion $\hat{H}(j\omega)$ ermittelte äquivalente Verstärkung $\hat{v}_{ä4}$ mit dem theoretischen Ergebnis $v_{ä4}$ nach Gleichung (4.69) und dem aus dem Ergebnis bei Gaußverteilung gemittelten Wert $\tilde{v}_{ä4}$ nach Gleichung (4.78) verglichen. Zu erkennen ist außer der starken Abweichung zwischen theoretischem Verlauf und Messung, daß die Meßwerte i. a. etwas höher liegen (vergleiche auch Bild 4.10). Die starke Abweichung bei der Wortlänge w = 8 und geringer Aussteuerung ist dadurch bedingt, daß hier der 12 bit-A/D-Wandler die Quantisierung bestimmt und nicht die in Gleichung (4.64) definierte nichtlineare Kennlinie. (Vergleiche Diskussion zu Bild 4.16)

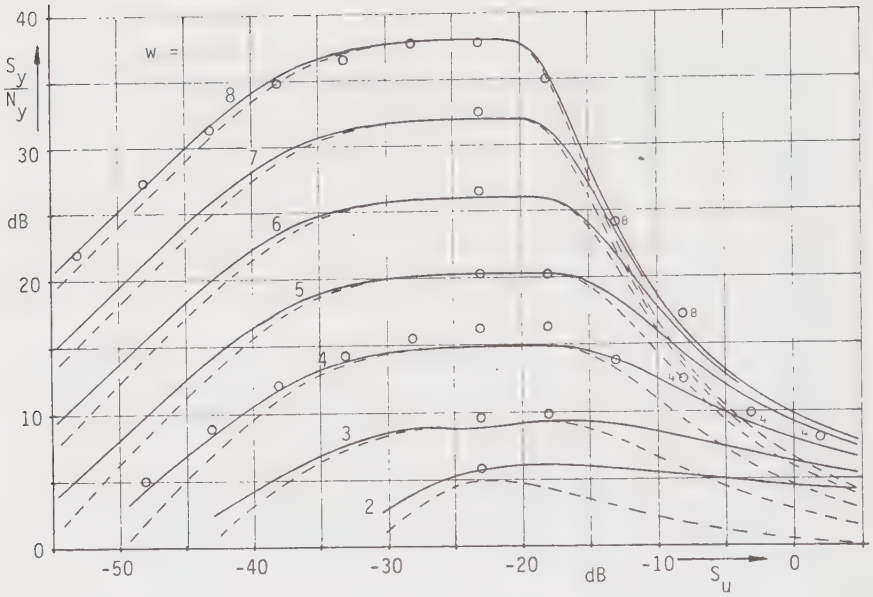


Bild 4.19 : SNR bei logarithmischer PCM und K_o-verteiltem Signal

--- theoretischer Verlauf

—— Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung

o Meßwerte

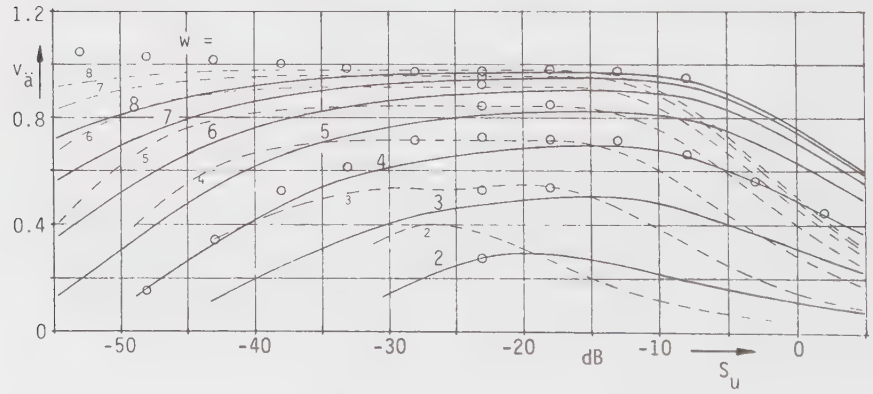


Bild 4.20 : Äquivalente Verstärkung bei logarithmischer PCM und K_o-verteiltem Signal

--- theoretischer Verlauf

—— Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung

o Meßwerte

Im Bild 4.21 sind gemessene Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ bei einer Wortlänge w = 8 für verschiedene Aussteuerungen gezeigt. Die Ergebnisse sind denen bei gaußverteiltem Signal sehr ähnlich (siehe Diskussion zu Bild 4.18), mit der Ausnahme, daß die Meßwerte der Störleistungsdichte bei Übersteuerung ($\sigma_u \hat{=}$ - 8 dB) aufgrund der Eigenschaften des K_o-verteilten Signals stark streuen (siehe Diskussion der Meßergebnisse in Kapitel 4.1.2.2).

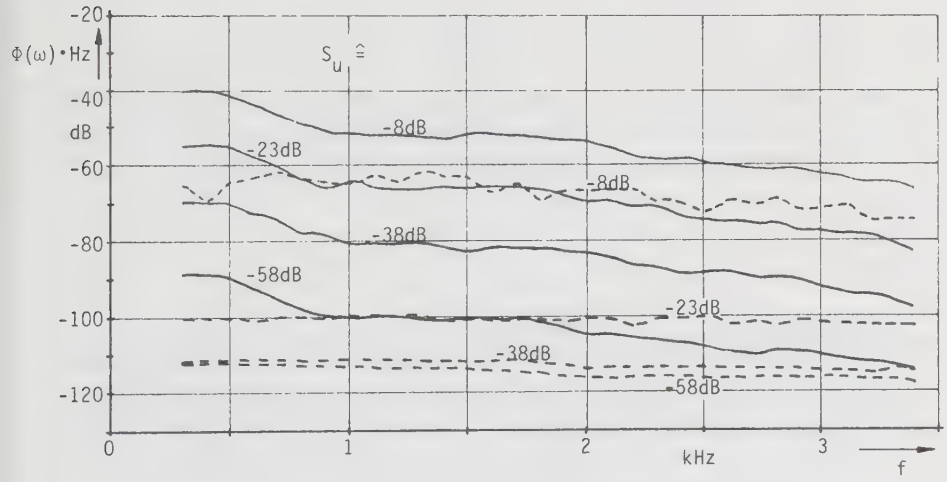


Bild 4.21 : Leistungsdichtesprektrum bei logarithmischer PCM und K_o-verteiltem Signal bei w = 8
—— Ausgangssignal
--- Störsignal

4.2.3 Differentielle PCM

Bei der differentiellen PCM (DPCM) wird mit Hilfe eines Prädiktorfilters im Sender das zu übertragende Signal so vorverarbeitet, daß eine Redundanzminderung erfolgt und dadurch bei der Übertragung mittels PCM ein höherer Signalrauschabstand möglich wird. Im Empfänger wird durch inverse Filterung das ursprüngliche Signal wiedergewonnen /43/. Bei Rückwärtsprädiktion (Bild 4.22) wird nicht wie bei Vorwärtsprädiktion das Eingangssignal u(k) für die Prädiktion verwendet, sondern das aus dem codierten Differenzsignal $\Delta u_c(k)$ zurückgewonnene Signal v(k). Dies hat den Vorteil, daß sich bei fehlerfreier Übertragung der Einfluß der Codierung auf die Prädiktion im Sender und Empfänger aufhebt. Durch Subtraktion des Vorhersagesignals $u_v(k)$ vom Eingangssignal u(k) erhält man das zu übertragende Differenzsignal $\Delta_u(k)$, das geringere Leistung besitzt als das Eingangssignal und dessen Spektrum einem "weißen" Spektrum angenähert ist.

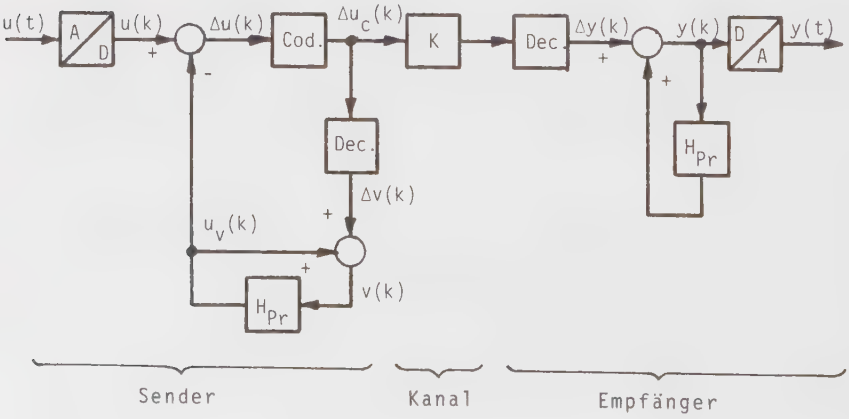


Bild 4.22.: DPCM mit Rückwärtsprädiktion

Die hier vorgestellten Messungen sind bei fehlerfreier Übertragung aufgenommen worden. Dadurch ergibt sich eine Vereinfachung des Blockschaltbildes, da dann die Signale $\Delta v(k)$ und $\Delta y(k)$ identisch sind (Bild 4.23).

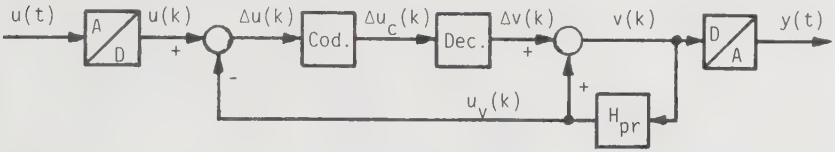


Bild 4.23: Blockschaltbild der DPCM mit Rückwärtsprädiktion bei fehlerfreier Übertragung

Die Blöcke Codierung und Decodierung lassen sich wie bei Kapitel 4.2.2 (logarithmische PCM) zu einer gedächtnislosen nichtlinearen Kennlinie $f(\Delta u)$ zusammenfassen. Durch Zerlegen des Signals $\Delta v(k)$ in

$$\Delta v(k) = f(\Delta u(k)) = v_{\ddot{a}}(\sigma_{\Delta u}) \cdot \Delta u(k) + e_{\Delta}(k) \qquad (4.80)$$

läßt sich das Blockschaltbild weiter vereinfachen (Bild 4.24).

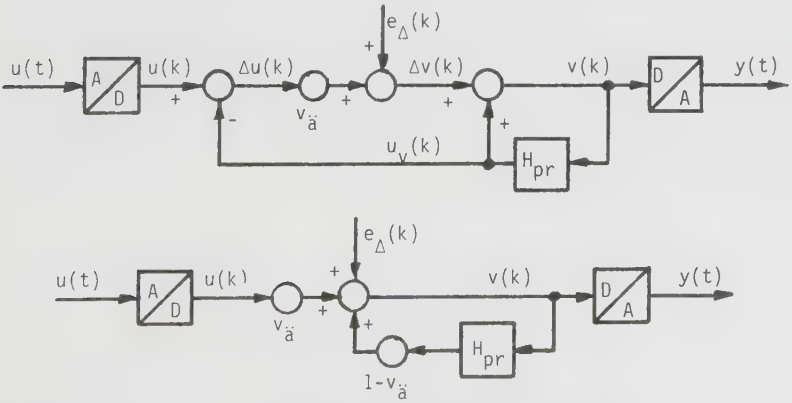


Bild 4.24: Vereinfachte Blockschaltbilder der DPCM für Rückwärtsprädiktion bei fehlerfreier Übertragung

Aus dem Signalfluß in Bild 4.24 läßt sich der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal angeben:

$$V(z) = \frac{E_{\Delta}(z) + v_{\ddot{a}} U(z)}{1 - (1-v_{\ddot{a}}) H_{pr}(z)} \qquad (4.81)$$

Für den Fall, daß die äquivalente Verstärkung $v_{\ddot{a}}$ (wie gewünscht) gleich eins ist, erhält man

$$V(z)\Big|_{v_{\ddot{a}}=1} = E_{\Delta}(z) + U(z) \quad . \qquad (4.82)$$

Das in der Nichtlinearität $f(\Delta u)$ entstehende Störsignal $e_{\Delta}(k)$ liegt also voll am Ausgang an. Eine Erhöhung des Signalrauschabstands bei DPCM ergibt sich im Vergleich zu PCM deshalb nur dann, wenn die geringere Aussteuerung der Nichtlinearität (des Codierers) durch das Differenzsignal $\Delta u(k)$ ein leistungsschwächeres Störsignal bewirkt.

Ist die äquivalente Verstärkung $v_{\ddot{a}}$ kleiner als eins, wie es bei geringer Aussteuerung oder bei geringer Wortlänge der Fall ist, geschieht eine spektrale Verfärbung des Nutzsignals und des Störsignals entsprechend dem Nenner in Gleichung (4.81).

Der Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal $u(k)$ und dem zu übertragenden Differenzsignal $\Delta u(k)$ läßt sich wie folgt ableiten (vergleiche Bild 4.24):

$$\Delta U(z) = U(z) - V(z) \cdot H_{pr}(z) \qquad \text{und}$$

$$V(z) = V(z) \cdot H_{pr}(z) + E_{\Delta}(z) + v_{\ddot{a}} \Delta U(z)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U(z) = \frac{[1-H_{pr}(z)] \cdot U(z) - H_{pr}(z) \cdot E_{\Delta}(z)}{1 - (1-v_{\ddot{a}}) H_{pr}(z)} \qquad (4.83)$$

Für den Fall der idealen Codierung, d. h.

$$v_{\ddot{a}} = 1 \quad \text{und} \quad e_{\Delta}(k) \equiv 0 \quad ,$$

erhält man

$$\Delta U(z) = U(z) \cdot [1 - H_{pr}(z)]$$

$$= U(z) \cdot H_{\Delta}(z) \tag{4.84}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $h_{pr}(\nu)$ des nichtrekursiven Prädiktorfilters $H_{pr}(z)$,

$$H_{pr}(z) = \sum_{\nu=1}^{n} h_{pr}(\nu) z^{-\nu} \quad , \tag{4.85}$$

wird so durchgeführt, daß die Leistung des Differenzsignals $\Delta u(k)$ minimiert wird. Diese Forderung läßt sich bei Kenntnis der normierten AKF $\varphi_{uu}(\kappa)$ des Eingangssignals lösen /43/. Hierfür wurde zunächst die AKF des auf 0,3 kHz bis 3,4 kHz bandbegrenzten Rauschsignals, wie es auch bei linearer und logarithmischer PCM verwendet wurde, gemessen. Diese wie die daraus berechneten Koeffizienten für ein Prädiktionsfilter achten Grades sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

ν	$\varphi_{uu}(\nu)$	$h_{pr}(\nu)$
1	0,773	1,04785
2	0,452	-0,56964
3	0,233	0,33820
4	0,046	-0,21606
5	-0,129	0,11749
6	-0,289	-0,18604
7	-0,396	0,05597
8	-0,443	-0,12567

Tabelle 4.1: Autokorrelationskoeffizienten des Eingangssignals und Koeffizienten des Prädiktorfilters

Die Betrags- und Phasenfrequenzgänge des Prädiktorfilters $H_{pr}(z)$ und von $H_{\Delta}(z) = 1-H_{pr}(z)$ sind im Bild 4.25 dargestellt. Um die Wirkung der Prädiktion zu erkennen, sind die Leistungsdichtespektren des Eingangssignals $\Phi_{uu}(\omega)$ und des Differenzsignals $\Phi_{\Delta u\Delta u}(\omega)$ eingezeichnet.

Das gemessene Verhältnis der Leistungen von Differenzsignal und Eingangssignal beträgt

$$\sigma_u^2/\sigma_{\Delta u}^2 \;\hat{=}\; 7{,}22 \text{ dB} \qquad (4.86)$$

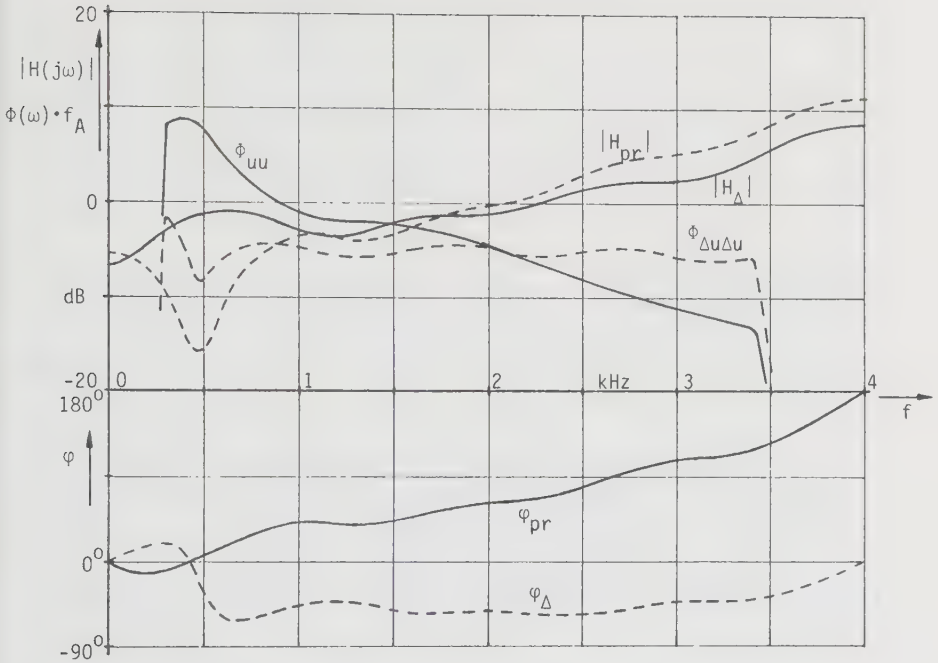


Bild 4.25 : Frequenzgänge des Prädiktorfilters $H_{pr}(z)$ und von $1 - H_{pr}(z) = H_{\Delta}(z)$
Leistungsdichtesprektren von Eingangs- und Differenzsignal

4.2.3.1 Logarithmische DPCM bei gaußverteiltem Signal

Zur Abschätzung des Signalrauschabstandes bei logarithmischer DPCM wird versucht, die theoretischen Ergebnisse des Kapitels 4.2.1 (logarithmische PCM) zu verwenden. Vergleicht man dazu die Stör- und Nutzsignalanteile im decodierten Signal v(k) anhand der Gleichungen (4.36) , (4.80) und (4.81), erkennt man zwei Unterschiede:

- Bei DPCM geschieht für $v_{\ddot{a}} \neq 1$ eine spektrale Verformung der Signalanteile entsprechend dem Nenner der Gleichung (4.81), so daß sich das Verhältnis der Leistungen der Signalanteile ändert.

- Bei DPCM sind das Störsignal und die äquivalente Verstärkung nicht vom Eingangssignal u(k) bestimmt, sondern vom leistungsschwächeren Differenzsignal $\Delta u(k)$.

Für die Abschätzung sei der Einfluß der spektralen Verformung vernachlässigt.

Nimmt man weiterhin (wie bei PCM) an, das Spektrum des Störsignals $e_{\Delta}(k)$ sei weiß, so ist der Einfluß des D/A-Wandlers auf den Signalrauschabstand durch den sinx/x-förmigen Amplitudenfrequenzgang durch die Gleichungen (4.49) und (4.50) beschrieben.

Letztlich ist noch die Annahme zu treffen, das zu codierende Differenzsignal $\Delta u(k)$ sei gaußverteilt, nach Gleichung (4.83) müßte dazu das Störsignal $e_{\Delta}(k)$ gaußverteilt sein, was sicherlich nicht der Fall ist. Da das Störsignal $e_{\Delta}(k)$ "gefiltert" in das Differenzsignal $\Delta u(k)$ eingeht, wird bei höheren Signalrauschabständen das Differenzsignal jedoch näherungsweise gaußverteilt sein.

Mit diesen drei Annahmen gelten die für logarithmische PCM bei gaußverteiltem Signal ermittelten Verläufe des Signalrauschabstandes (Bild 4.16) für das decodierte Differenzsignal $\Delta v(k)$. Da das Nutzsignal u(k) einen um 7,22 dB höheren Pegel besitzt (Gleichung (4.86)), ist das erwartete Signalrauschverhältnis um diesen Wert höher und bei um diesen Wert höheren Eingangspegel zu finden.

In Bild 4.26 ist das aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelte Signalrauschverhältnis $\hat{S}_y/\hat{N}_y$ mit dem näherungsweisen Verlauf eingetragen. Man erkennt außer für die Wortlänge w = 8 die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Näherung.
Im Bereich geringer Aussteuerung und w = 8 ist der Singalrauschabstand etwa 3 dB geringer als erwartet. Dies deutet auf eine zusätzliche Störquelle hin, die etwa gleiche Leistung abgibt wie das Quantisierungsrauschen aufgrund der Codierung besitzt. Die Störquelle dürfte im Prädiktionsfilter sitzen, wo vermutlich die arithmetischen Operationen mit zu geringer Wortlänge durchgeführt werden.

Bei hoher Aussteuerung entsprechen die Meßwerte nicht dem erwarteten Verlauf, da die Signalbegrenzung nicht wie angenommen im Codierer geschieht, sondern bereits durch die Zahlenbereichsbegrenzung nach dem A/D-Wandler. Dies hat zur Folge, daß der theoretische Dynamikgewinn durch die Übertragung des Differenzsignals hier nicht nutzbar ist.

Dies ist auch der Grund, warum die auch durchgeführten Messungen bei linearer DPCM schlechtere Ergebnisse brachten als bei linearer PCM.

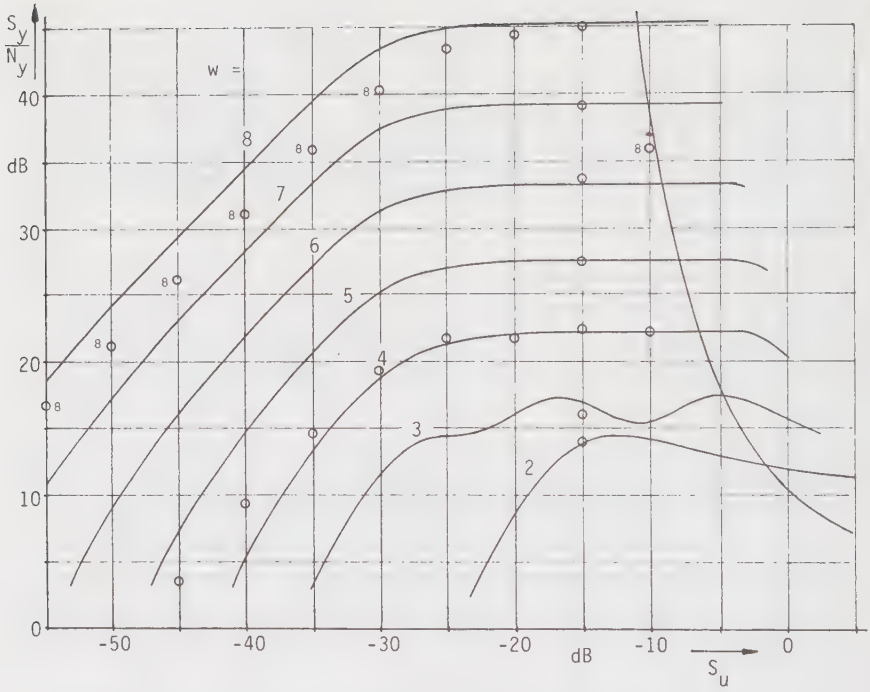


Bild 4.26 : SNR bei logarithmischer DPCM und gaußverteiltem Signal

—— theoretischer Verlauf

o Meßwerte

Die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ zwischen dem Eingangssignal $u(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ besteht aus zwei Faktoren, dem einen gemäß Gleichung (4.81) und dem durch die A/D- und D/A-Wandlung bedingten. Aus der Gleichung (4.81) erhält man

$$\frac{V(\exp j\omega T_A)}{U(\exp j\omega T_A)} = \frac{v_{\ddot{a}}(\sigma_{\Delta u})}{1-[1-v_{\ddot{a}}(\sigma_{\Delta u})] \cdot H_{pr}(\exp j\omega T_A)} \qquad (4.87)$$

Der Einfluß der Wandlung ist durch die Gleichung (4.34) gegeben, so daß sich für die gesamte Übertragungsfunktion folgender Ausdruck ergibt:

$$H_{DPCM}(j\omega) = \frac{v_{\ddot{a}}}{1-(1-v_{\ddot{a}}) \cdot H_{pr}(\exp j\omega T_A)} \cdot \frac{\sin(\omega T_A/2)}{\omega T_A/2} \exp(-j\omega\tau)$$

$$\text{mit} \qquad T_A = 125\ \mu s \quad \text{und} \quad \tau > \frac{T_A}{2} \qquad (4.88)$$

Für $v_{\ddot{a}} \to 1$ verschwindet der Einfluß des Prädiktionsfilters, es bleibt der sinx/x-förmige Verlauf des Betragsfrequenzganges aufgrund des Abtasthaltegliedes. Bei kleiner werdenden Werten $v_{\ddot{a}}$ wird der Einfluß des Prädiktionsfilters stärker, bis bei $v_{\ddot{a}} \to 0$ der Nenner gegen die in Gleichung (4.84) gegebene und in Bild 4.25 dargestellte Übertragungsfunktion H_Δ übergeht.

In Bild 4.27 sind gemessene Betragsfrequenzgänge dargestellt. Bei optimaler Aussteuerung und der Wortlänge w = 8 wurde ein sin/x-förmiger Verlauf gemessen, da $v_{\ddot{a}} \approx 1$ ist. Bei der Wortlänge w = 4 nimmt mit der Aussteuerung S_u die äquivalente Verstärkung $v_{\ddot{a}}$ ab, so daß sich der Verlauf zunehmend dem inversen Verlauf von H_Δ annähert (vergleiche Bild 4.25).

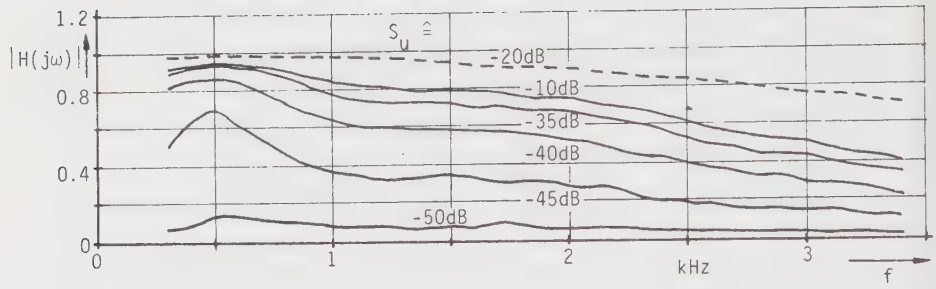


Bild 4.27 : Betragsfrequenzgänge der Übertragungsfunktion bei logarithmischer DPCM und gaußverteiltem Signal

--- w = 8

—— w = 4

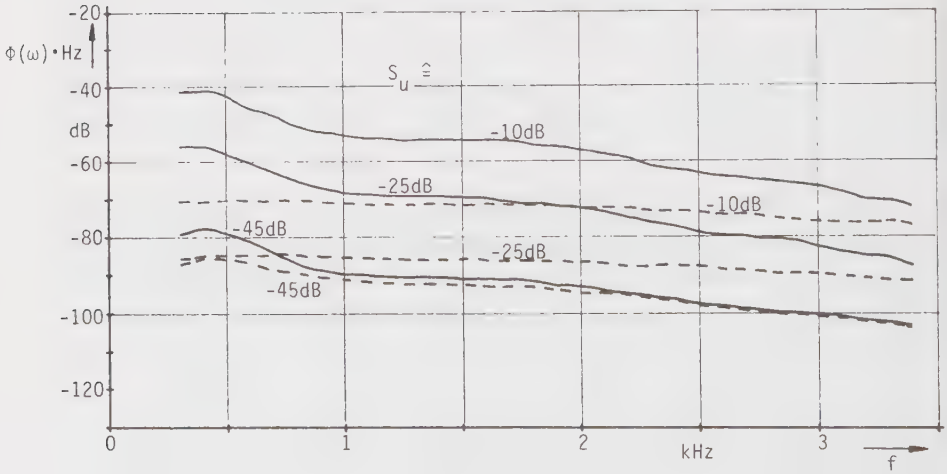


Bild 4.28 : Leistungsdichtespektrum bei logarithmischer DPCM und gaußverteiltem Signal bei w = 4

—— Ausgangssignal

--- Störsignal

In Bild 4.28 sind gemessene Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ bei der Wortlänge w = 4 und verschiedenen Aussteuerungen gezeigt. Im Bereich optimaler Aussteuerung ($S_u \hat{=}$ - 10 dB bis - 25 dB) besitzt das Spektrum keinen sinx/x-förmigen Verlauf wie bei PCM, sondern fällt bei höheren Frequenzen stärker ab (vergleiche Gleichung (4.81)). Bei geringer Aussteuerung ($S_u \hat{=}$ - 45 dB) ist eine starke spektrale Verfärbung des Störsignals zu erkennen, mit einem Maximum bei etwa 500 Hz, wo $|H_\Delta|$ ein Minimum besitzt.

4.2.3.2 Logarithmische DPCM bei K_0-verteiltem Signal

Um eine Näherung für den Signalrauschabstand zu erhalten, wird wie bei logarithmischer DPCM bei gaußverteiltem Signal angenommen, daß die für logarithmische PCM bei K_0-verteiltem Signal ermittelten Verläufe des Signalrauschabstandes (Bild 4.19) für das decodierte Differenzsignal $\Delta v(k)$ gelten. Dabei wird u. a. die Annahme gemacht, das zu übertragende Differenzsignal $\Delta u(k)$ sei K_0-verteilt.

Im Bild 4.29 ist das aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelte Signalrauschverhältnis $\hat{S}_y/\hat{N}_y$ mit den näherungsweisen Verläufen eingetragen. Bei der Wortlänge w = 8 sind die Meßwerte im unteren Aussteuerungsbereich etwa 4 dB geringer als die Näherung, was auf eine zusätzliche Störquelle im Prädiktionsfilter schließen läßt (vergleiche Bild 4.26). Bei hoher Aussteuerung sind wie bei gaußverteiltem Signal die Meßwerte von der Signalbegrenzung durch den A/D-Wandler bestimmt.

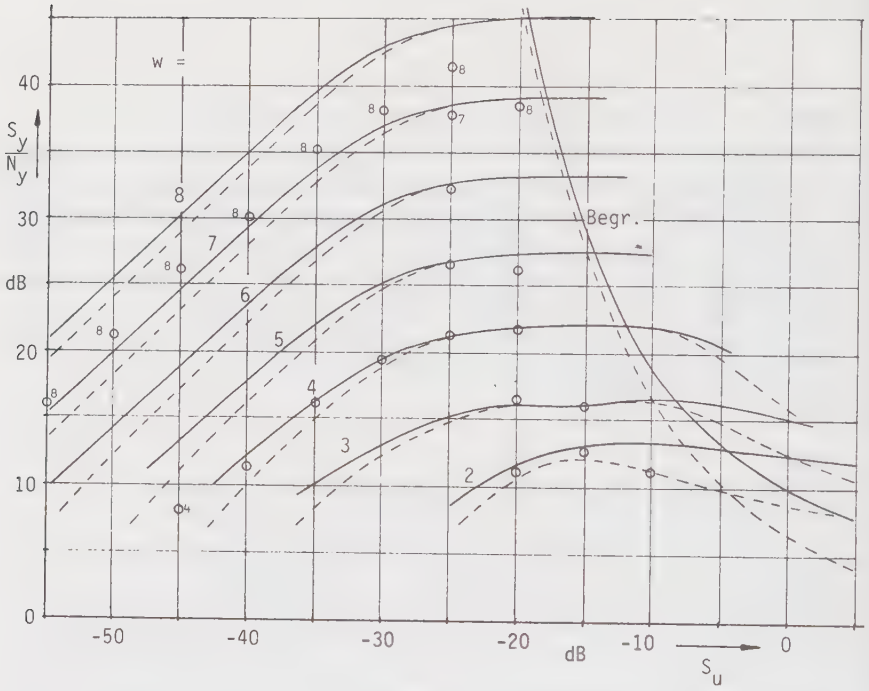


Bild 4.29 : SNR bei logarithmischer DPCM und K_o-verteiltem Signal

--- theoretischer Verlauf

—— Mittelung der Ergebnisse bei Gaußverteilung

o Meßwerte

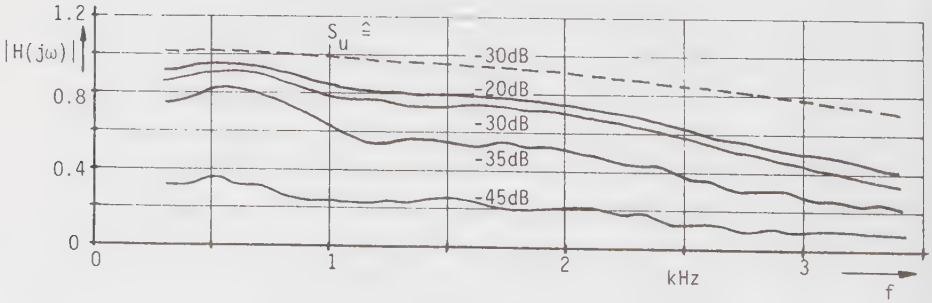


Bild 4.30 : Betragsfrequenzgänge der Übertragungsfunktion bei logarithmischer DPCM und K_o-verteiltem Signal

--- w = 8

—— w = 4

Für die Übertragungsfunktion gelten die gleichen Aussagen wie bei gaußverteiltem Signal, insbesondere die Gleichung (4.88).

Im Bild 4.30 sind gemessene Betragsfrequenzgänge der Übertragungsfunktion dargestellt. Die Verläufe sind denen bei gaußverteiltem Signal, abgesehen vom absoluten Pegel, sehr ähnlich (vergleiche Bild 4.27). Aufgrund der Eigenschaften des K_o-verteilten Signals ergeben sich jedoch wie bereits in bisher vorgestellten Messungen größere Streuungen der Meßwerte als durch die Genauigkeitsberechnung zu erwarten ist.

Im Bild 4.31 sind gemessene Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ bei der Wortlänge w = 4 und verschiedenen Aussteuerungen gezeigt. Auch hier gelten abgesehen von den absoluten Pegeln die Aussagen, die zu Bild 4.28 bei gaußverteiltem Signal gemacht wurden.

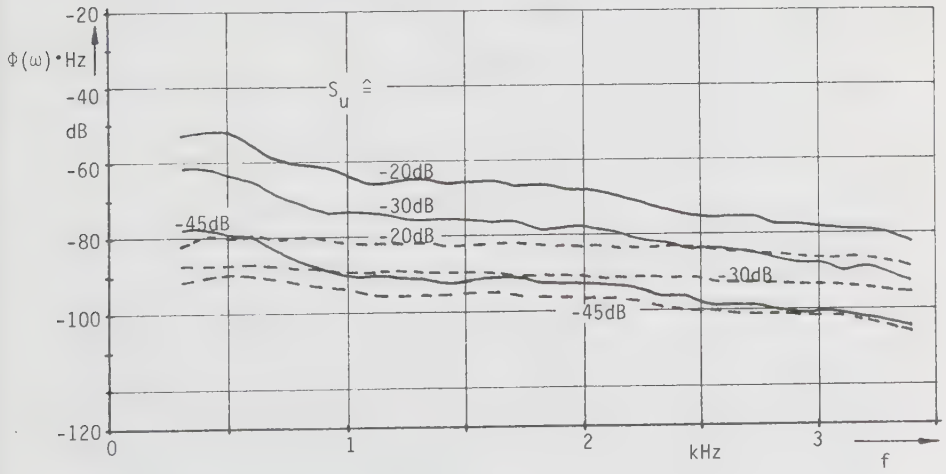


Bild 4.31 : Leistungsdichtespektren bei logarithmischer DPCM und K_o-verteiltem Signal bei w = 4
—— Ausgangssignal
--- Störsignal

4.3 Deltamodulation

An einem Demonstrationsgerät, das am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Erlangen, entstanden ist /50/, wurden Messungen zur linearen Deltamodulation (LDM) und zur adaptiven Deltamodulation (ADM) mit Momentanwertkompandierung durchgeführt. Weiterhin wurden Messungen an einem industriellen Gerät zur ADM mit Silbenkompandierung gemacht /51/.

Die Parameter für die Messungen und die daraus resultierenten Genauigkeiten sind identisch mit denen in Kapitel 4.2. Ebenso lieferte der in Kapitel 3.2.2 beschriebene Generator das Testsignal mit sprachähnlichem Spektrum und Gauß- bzw. K_0-Verteilung.

Zunächst sei die Funktion der LDM anhand von Bild 4.32 erläutert :

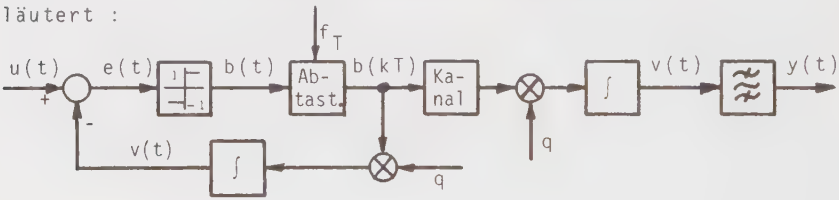


Bild 4.32: Prinzip der Linearen Deltamodulation

Im Sender wird das bandbegrenzte Eingangssignal u(t) mit dem rekonstruierten Signal v(t) verglichen, das Differenzsignal e(t) mittels eines Komparators quantisiert und das so entstandene Signal b(t) mit $|b(t)| = 1$ mit der Taktfrequenz $f_T = 1/T$ abgetastet. Dieses binäre Signal b(kT) wird übertragen. Im Empfänger wie im Rückkopplungszweig des Senders wird das binäre Signal b(kT) mit der Stufenhöhe q multipliziert und integriert. Die Integration kann "ideal" erfolgen, oder wie in der Praxis üblich mittels eines R-C-Netzwerkes. Das durch die Integration entstandene stufenförmige rekonstruierte Signal v(t) ist bei fehlerfreier Übertragung in Sender und Empfänger gleich. Im Empfänger wird das Ausgangssignal y(t) mittels eines Tief- bzw. Bandpasses mit der Bandbreite des Eingangssignals aus dem rekonstruierten Signal v(t) gewonnen.

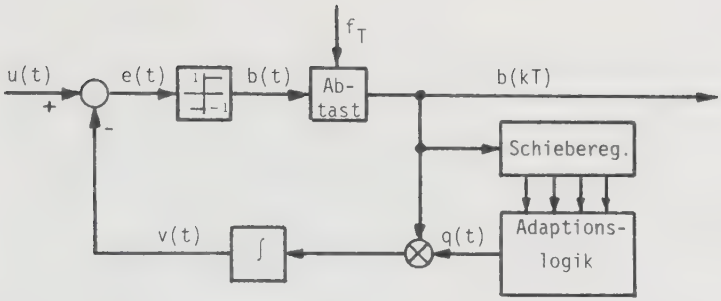


Bild 4.33 : Prinzip des adaptiven Deltamodulators

Bei der adaptiven Deltamodulation wird die Stufenhöhe q dem Eingangssignal bzw. dessen Leistung angepaßt. Dies geschieht, indem in einem Schieberegister vergangene Werte des zu übertragenden Signals b(kT) gespeichert werden, aus denen eine Adaptionslogik eine zeitabhängige Stufenhöhe q(t) ermittelt, die zu möglichst hohem Signalrauschabstand führen soll.

Aufgrund der Integration des mit der Stufenhöhe q gewichteten binären Signals ist leicht zu erkennen, daß das rekursive Signal v(t) nur eine maximale Steigung v'_{max} annehmen kann, die bei LDM und idealer Integration konstant ist :

$$v'_{max} = q \cdot f_T \tag{4.89}$$

Besitzt das Eingangssignal u(t) eine Steigung u'(t), die betragsmäßig größer als v'_{max} ist, wird das Differenzsignal e(t) betragsmäßig größer als die Stufenhöhe q werden, da das rekonstruierte Signal v(t) dem Eingangssignal u(t) nicht folgen kann. Man spricht deshalb von Steigungsüberlastung. Es entstehen Verzerrungen, die mit steigender Aussteuerung stark anwachsen und das Signalrauschverhältnis entsprechend reduzieren.

Bei geringer Aussteuerung, wenn die Steigung u'(t) des Eingangssignals betragsmäßig kleiner als v'_{max} ist, spricht man vom Bereich des granularen Geräusches.

4.3.1 Lineare Deltamodulation

Die Messungen zur linearen Deltamodulation (LDM) wurden bei idealer Integration und fehlerfreier Übertragung bei gauß- und K_0-verteiltem Eingangssignal und verschiedenen Abtastfrequenzen durchgeführt. Das Blockschaltbild 4.32 läßt sich dann vereinfachen indem Sender und Empfänger zusammengefaßt werden (Bild 4.34) :

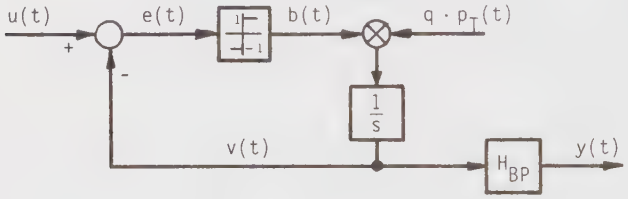


Bild 4.34 : Blockschaltbild der LDM bei fehlerfreier Übertragung

Die Abtastung und Multiplikation mit der Stufenhöhe erfolgt durch Multiplikation des Komparatorsignals

$$b(t) = \mathrm{sgn}(e(t)) = \mathrm{sgn}(u(t) - v(t)) \tag{4.90}$$

mit der Impulsfolge

$$q \cdot p_T(t) = q \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta_0(t-\nu T) \quad . \tag{4.91}$$

Daraus ergibt sich das rekonstruierte Signal durch Integration:

$$v(t) = q \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(u(\nu T)-v(\nu T)) \cdot \delta_{-1}(t-\nu T) \tag{4.92}$$

Das Ausgangssignal

$$y(t) = v(t) * h_{0,BP}(t) \tag{4.93}$$

läßt sich aufspalten in einen zum Eingangssignal korrelierten Anteil (Nutzsignal) und unkorrelierten Anteil (Störsignal) :

$$y(t) = y_L(t) + n(t) \quad \text{mit} \tag{4.94}$$

$$y_L(t) = u(t) * h_{O,LDM}(t) \quad . \tag{4.95}$$

Dabei beschreibt die Impulsantwort $h_{O,LDM}(t)$ die linearen Verzerrungen.

Zur Ermittlung des Signalrauschabstandes bei granularem Rauschen und bei Steigungsüberlastung gibt es eine große Zahl von Veröffentlichungen. Jedoch gehen diese in der Regel von einer bestimmten Signalform aus (z. B. Sinus oder gaußverteiltes Rauschen mit bandbegrenztem weißen Spektrum, etc.) und setzen häufig empirisch gefundene Konstanten ein. Zudem wird meist nicht der zum Eingangssignal unkorrelierte Signalanteil n(t) als Störsignal betrachtet, sondern das auf die Nutzbandbreite begrenzte Differenzsignal e(t). Dadurch ergeben sich vor allem bei Steigungsüberlastung sehr große Unterschiede im Signalrauschverhältnis zwischen den Veröffentlichungen und den hier vorzustellenden Messungen.

In Bild 4.35 sind für gauß- und K_o-verteilte Signale mit sprachähnlichem Spektrum, wie sie in Kapitel 3.2.2 beschrieben und in Kapitel 4.2 auch verwendet wurden, die aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelten Signalrauschabstände $\hat{S}_y/\hat{N}_y$ eingetragen. Die Bitrate f_T beträgt dabei 150 kHz bzw. 16 kHz. Die Aussteuerung ist wie üblich auf die maximale Steigung $q \cdot f_T$ bezogen und zwar einmal der Effektivwert σ_u, der Steigung und zum andern das Produkt zwischen Effektivwert σ_u des Eingangssignals und der maximalen Signalfrequenz f_o = 3,4 kHz.

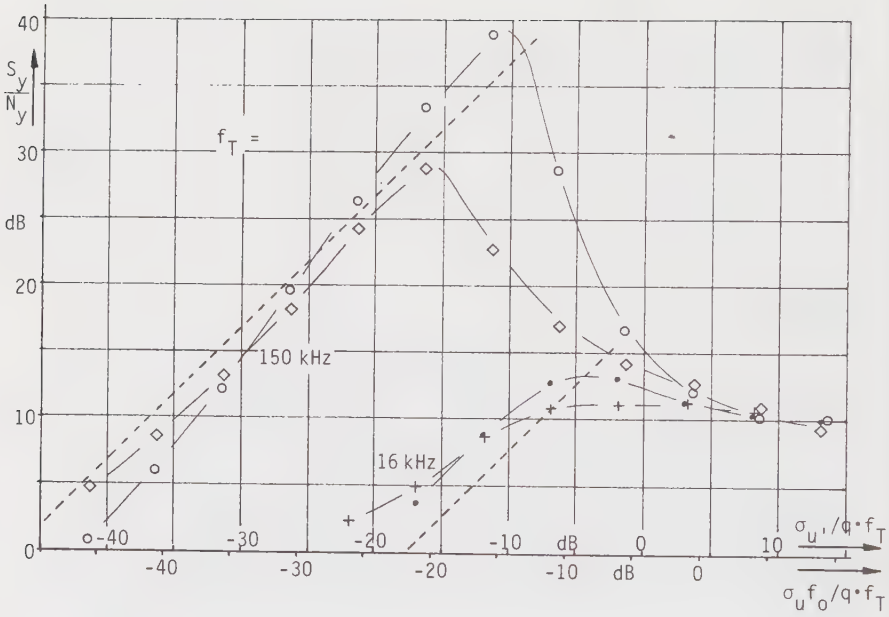


Bild 4.35 : SNR bei LDM

o , • gaußverteiltes Eingangssignal

◇ , + K_0-verteiltes Eingangssignal

Im Bereich granularem Geräusches ist zum Vergleich der Verlauf eingetragen, der sich ergäbe, wenn der Störgeräuschanteil im rekonstruierten Signal v(t) im Bereich ± q gleichverteilte wäre und ein weißes Spektrum besäße.
Es ist zu erkennen, daß bei gaußverteiltem Signal und einer Aussteuerung knapp unterhalb der Steigungsüberlastung ($4 \cdot \sigma_{u'} \approx q \cdot f_T$) der Signalrauschabstand ca. 3 dB größer ist als der grobe Vergleich angibt. Dies deckt sich sehr gut mit den Angaben von Jayant /52/, wo das Störgeräusch als Markov-Folge erster Ordnung betrachtet wird. Dagegen nimmt der Signalrauschabstand mit sinkender Aussteuerung überprportional ab, was den Angaben in /52/ widerspricht.
O'Neal gibt in /53/ Signalrauschabstände für gaußverteilte Signale an, die im Bereich granularen Rauschens gleiches Verhalten zeigen wie die durchgeführten Messungen. Die Verläufe basieren auf einer Approximation von Van de Weg /54/, die jedoch sehr aufwendig zu berechnen ist.

Ein dem Meßergebnis ähnlicher Verlauf bei Steigungsüberlastung wurde in keiner Literaturstelle gefunden. Vor allem der Grenzwert für das Signalrauschverhältnis von ca. 9 dB bei extremer Übersteuerung wird immer weit geringer angegeben.

In Bild 4.36 ist das maximal Signalrauschverhältnis in Abhängigkeit von der Bitrate für gauß- und k_0-verteiltes Signal aufgetragen und in Bild 4.37 die optimale Aussteuerung, die zu dem maximalen Signalrauschverhältnis führt.
Steele gibt in /55/ Näherungen für optimale Aussteuerung und maximale Signalrauschverhältnisse für gaußverteilte Signale mit bandbegrentzten Tiefpaßspektrum ersten Grades an.

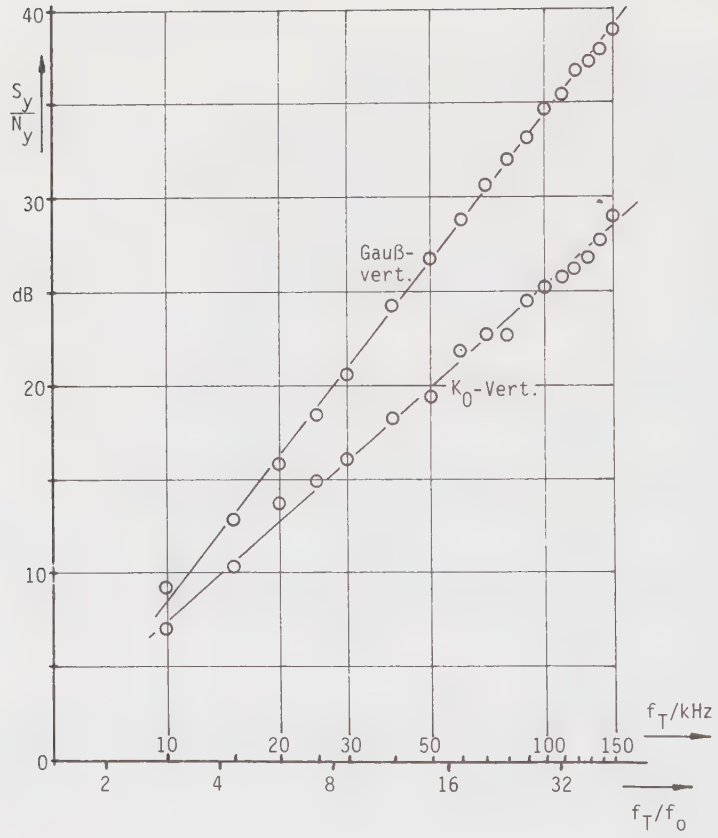


Bild 4.36 : Maximales SNR bei LDM

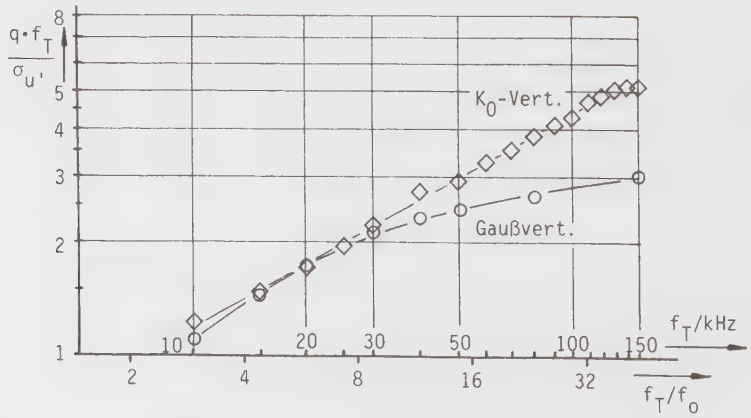


Bild 4.37 : Optimale Aussteuerung für maximales SNR

Setzt man die gemessenen Effektivwerte des Eingangssignals und der ersten beiden Ableitungen, also

$$\sigma_u' = 5{,}660 \frac{1}{ms} \cdot \sigma_u \tag{4.96}$$

und

$$\sigma_u'' = 80{,}44 \frac{1}{ms} \cdot \sigma_u' \tag{4.97}$$

in die dort angegebenen Beziehungen ein, so nähert man das Spektrum des Meßsignals mit dem eines Tiefpaßgeräusches ersten Grades mit der Eckfrequenz von ca. 400 Hz und einer Bandbegrenzung bei 3,4 kHz an. Die angegebenen Näherungen decken sich dann mit einer maximalen Abweichung von ca. 1 dB mit den Meßergebnissen (bei Gaußverteilung) in den Bildern 4.36 und 4.37 .

Im Bild 4.38 sind gemessene Leistungsdichtespektren $\Phi_{yy}(\omega)$ und $\Phi_{nn}(\omega)$ bei gaußverteiltem Signal und einer Bitrate von 150 kHz dargestellt. Bei optimaler Aussteuerung ($\sigma_u'/qf_T \hat{=}$ - 11,4 dB) und damit größtem Signalrauschabstand besitzt das Störsignal im Nutzband ein nahezu weißes Spektrum. Bei starker Übersteuerung ($\sigma_u'/qf_T \hat{=}$ 13,6 dB) erkennt man die starke spektrale Färbung des Störsignals. Dabei ist auch das Nutzsignal zu höheren Frequenzen hin stark gedämpft. Bei geringer Aussteuerung ($\sigma_u'/qf_T \hat{=}$ - 31,4 dB) ist das Spektrum des Störgeräusches im Nutzband noch nahezu weiß, jedoch ist die Störleistung höher als bei optimaler Aussteuerung. Erst im Bereich extremer Untersteuerung ($\sigma_u'/qf_T \hat{=}$ - 41,4 dB) ist das Spektrum des Störsignals auch im Nutzband gefärbt und das Nutzsignal stark abgeschwächt.

Für das K_0-verteilte Signal ergeben sich vergleichbare Verläufe bei entsprechenden Aussteuerungen.

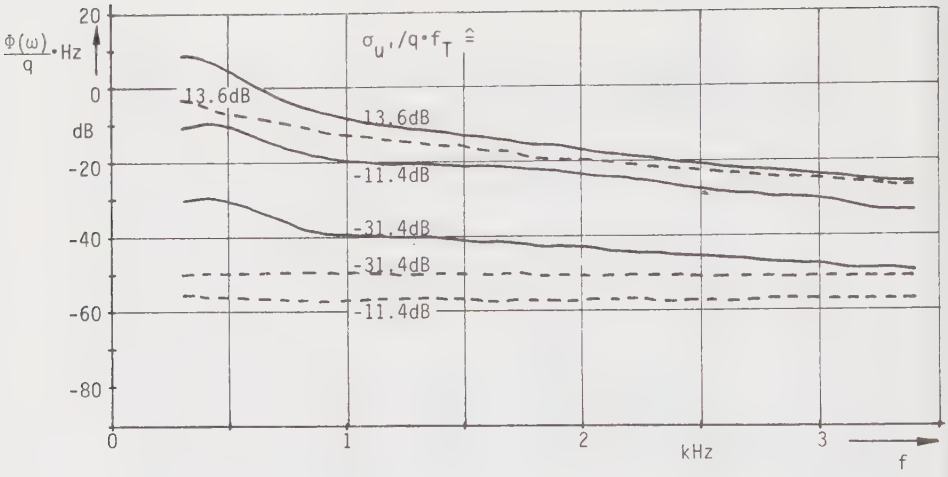


Bild 4.38 : Leistungsdichtespektren bei LDM und gaußverteiltem Signal

—— Ausgangssignal

--- Störsignal

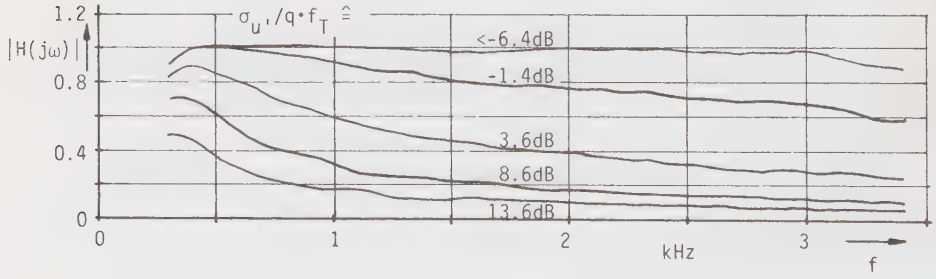


Bild 4.39 : Betragsfrequenzgänge der Übertragungsfunktion bei LDM und gaußverteiltem Signal

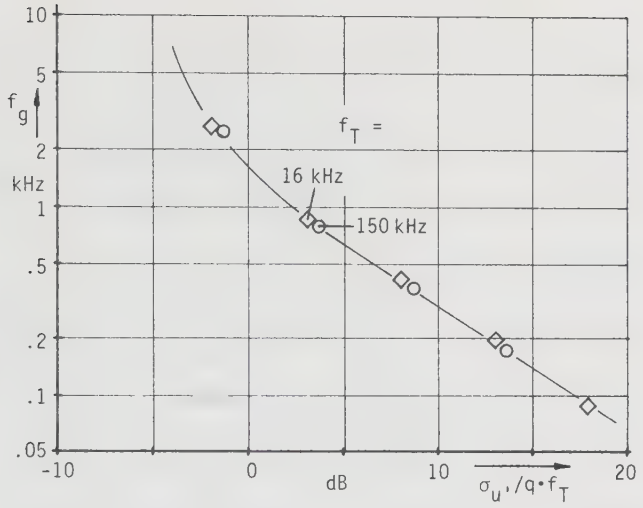


Bild 4.40 : 3 dB-Eckfrequenz in Abhängigkeit der Aussteuerung

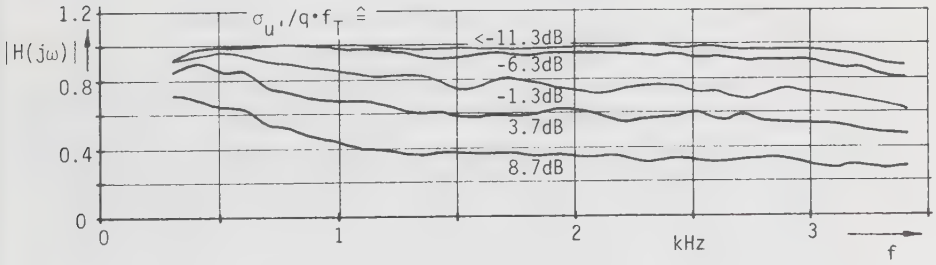


Bild 4.41 : Betragsfrequenzgänge der Übertragungsfunktion bei LDM und K_0-verteiltem Signal

Im Bild 4.39 sind gemessene Betragsfrequenzgänge $|\hat{H}(j\omega)|$ der Übertragungsfunktion bei gaußverteiltem Signal und einer Bitrate von 150 kHz bei verschiedenen Aussteuerungen dargestellt. Man erkennt das mit zunehmender Übersteuerung stärker werdende Tiefpaßverhalten. Die leichte Absenkung der Meßwerte bei 300 Hz und oberhalb von 3 kHz sind durch den verwendeten Bandpaß im Signalausgang bedingt.
Dieses Tiefpaßverhalten läßt sich bei gaußverteiltem Signal gut mit einem Tiefpaß ersten Grades approximieren (vergleiche /56/), wobei die 3 dB-Eckfrequenz f_g mit wachsender Übersteuerung sinkt. Diese Abhängigkeit ist für das gaußverteilte Signal in Bild 4.40 dargestellt. Dabei erkennt man, daß diese Abhängigkeit praktisch unabhängig von der Bitrate ist.

Ähnliche Ergebnisse für den Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion erhält man auch bei K_0-verteiltem Signal, wie in Bild 4.41 dargestellt. Jedoch lassen sich die Meßergebnisse nicht mehr mit einem Tiefpaßfrequenzgang ersten Grades approximieren, da der Abfall zu höheren Frequenzen hin flacher verläuft.

4.3.2 Adaptive Deltamodulation mit Momentanwertkompandierung

Die Messungen zur ADM mit Momentanwertkompandierung wurden bei idealer Integration und fehlerfreier Übertragung durchgeführt. Bei dem verwendeten Demonstrationsgerät /50/ besteht die Möglichkeit, die Adaptionslogik (vergleiche Bild 4.33), die die Änderung der Stufenhöhe bestimmt, verschieden einzustellen. Zur Ermittlung der optimalen Einstellung wurden bei sinusförmigen Eingangssignal von 300 Hz und 3 kHz und einer Bitrate von 32 kHz die Signalrauschabstände zu verschiedenen Einstellungen ermittelt. Dabei führte folgende Einstellung zu maximalem Signalrauschabstand (vergleiche /50/) :

Sequenzlänge	2
unterdrückte Sequenzen	keine
Änderung der Stufenhöhe	Faktor $\sqrt{2}$ bzw. $1/\sqrt{2}$
Verhältnis größte zu kleinste Stufenhöhe	255

Dies bedeutet, daß (ohne Ausnahmen) bei Gleichheit der zwei zuletzt übertragenen Bits b(kT) und b((k-1)T) die Stufenhöhe um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöht und bei Ungleichheit um den gleichen Faktor erniedrigt wird.
Da dieses Optimum nicht sehr ausgeprägt ist, wurde diese Einstellung auch für die Messungen bei gauß- und K_0-verteiltem Eingangssignal beibehalten.

Im Bild 4.42 sind die aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelten maximalen Signalrauschabstände für gauß- und K_0-verteilte Eingangssignale, wie sie auch bei LDM verwendet wurden, dargestellt. Zum Vergleich sind die Verläufe bei LDM aus Bild 4.36 eingetragen.
Dabei ergeben sich für das gauß- und K_0-verteilte Eingangssignal im Rahmen der Meßgenauigkeit gleiche Ergebnisse. Dies wird verständlich, wenn man das K_0-verteilte Eingangssignal als langsam amplitudenmoduliertes gaußverteiltes Signal betrachtet (Kapitel 3.2.2) und davon ausgeht, daß die Adaption in der Lage ist, diese Modulation zu kompensieren.

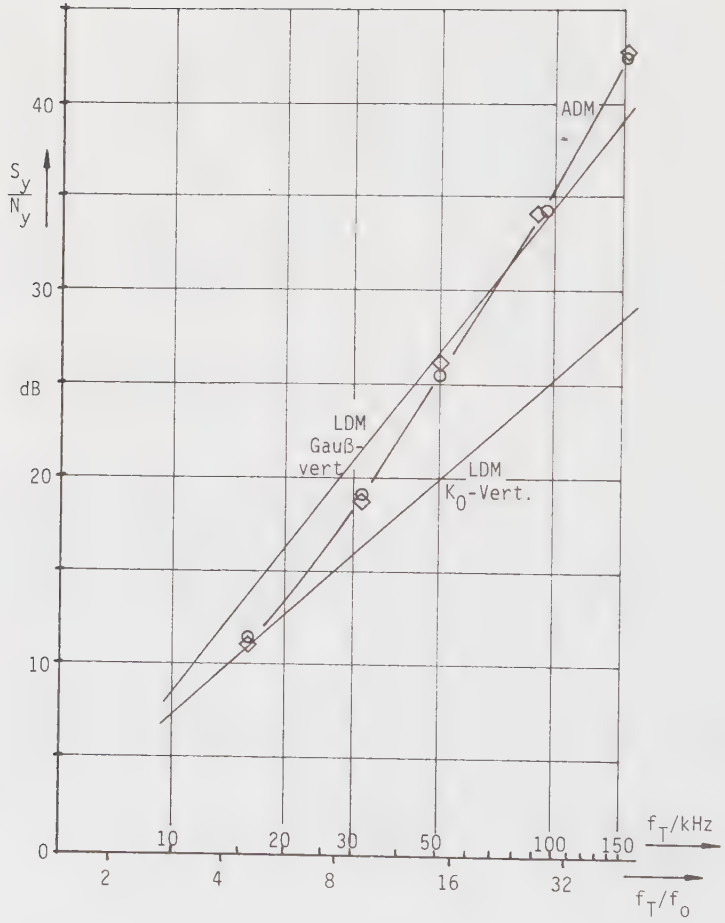


Bild 4.42 : Maximales SNR bei ADM mit Momentanwert-kompandierung

4.3.3 Adaptive Deltamodulation mit Silbenkompandierung

Der Unterschied der ADM mit Silbenkompandierung zu der mit Momentanwertkompandierung besteht darin, daß die Adaptionslogik nicht direkt eine Erhöhung bzw. Erniedrigung der Stufenhöhe bewirkt, sondern erst eine Mittelwertbildung dieses Änderungssignals erfolgt. Damit geschieht bei Silbenkompandierung eine etwas langsamere Anpassung der Stufenhöhe an den Signalpegel.

Das zur Messung verwendete Gerät enthält den in /51/ vorgestellten monolithischen Schaltkreis zur ADM, wobei durch die Beschaltung die im Anhang A 11 angebenenen Eigenschaften eingestellt waren.

Im Bild 4.43 sind die aus den gemessenen Leistungsdichtespektren $\hat{\Phi}_{yy}(\omega)$ und $\hat{\Phi}_{nn}(\omega)$ ermittelten Signalrauschabstände für das gauß- und K_0-verteilte Eingangssignal bei einer Bitrate von 16 kHz und 150 kHz dargestellt.

Im Bild 4.44 sind die maximalen Signalrauschabstände in Abhängigkeit von der Bitrate dargestellt. Zum Vergleich sind die Verläufe bei LDM und bei ADM mit Momentanwertkompandierung (Bild 4.42) angegeben. Wie bei Momentanwertkompandierung ergeben sich auch hier praktisch keine Unterschiede zwischen den maximalen Signalrauschabständen bei gauß- und K_0-verteiltem Eingangssignal.

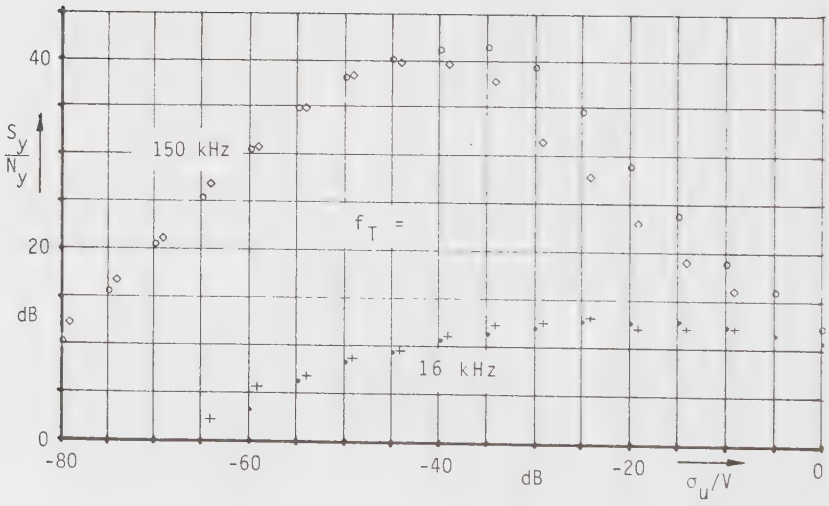


Bild 4.43 : SNR bei ADM mit Silbenkompandierung
o , • gaußverteiltes Eingangssignal
◇ , + K_0-verteiltes Eingangssignal

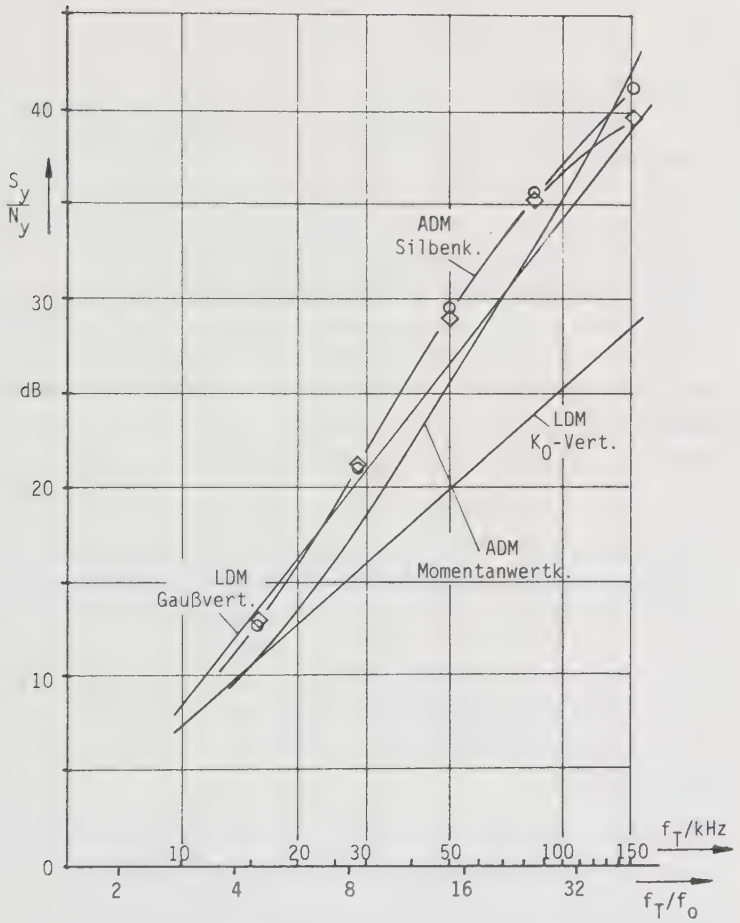


Bild 4.44 : Maximales SNR bei ADM mit Silbenkompandierung

o gaußverteiltes Signal

◇ K_0-verteiltes Signal

5. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird das modifizierte Rauschklirrmeßverfahren vorgestellt, das es ermöglicht, bei schwach nichtlinearen Übertragungssystemen die nichtlinearen wie auch die linearen Verzerrungen zu messen. Dabei ist kein spezielles Meßsignal erforderlich, sondern es kann mit einem beliebigen Signal gearbeitet werden. Damit ist dieses Meßverfahren gerade für solche Systeme besonders geeignet, deren Übertragungseigenschaften stark von den Eigenschaften der zu übertragenden Signale abhängt.

Für die erzielbaren Genauigkeiten bei der Messung von Nutz- und Störleistungsdichtespektren sowie der komplexen Übertragungsfunktion werden Beziehungen abgeleitet und damit Dimensionierungsvorschriften für einen Meßplatz angegeben. Ein digital realisierter Meßplatz, der bei einer Abtastfrequenz von maximal 20 kHz analoge wie digitale Systeme im Niederfrequenzbereich bis 8 kHz erfaßt, wird hinsichtlich optimaler Genauigkeit und maximaler Dynamik dimensioniert.

Um für Messungen ein reproduzierbares Signal zur Verfügung zu haben, wird ein Modellsignalgenerator vorgestellt und realisiert, bei dem es möglich ist, die Amplitudenverteilungsdichte und die Autokorrelationsfunktion des Modellsignals in weiten Bereichen frei einzustellen. Für das zur Realisierung nötige gaußverteilte Signal mit weißem Spektrum wird eine Erzeugungsmöglichkeit mittels einer Pseudozufallsfolge (m-Sequenz) und nichtlinearer Transformation vorgestellt.

Am realisierten Meßplatz durchgeführte Kontrollmessungen an verschiedenen digitalen schwachen Nichtlinearitäten ergeben, daß die Meßgenauigkeit im Rahmen der theoretisch erwarteten Genauigkeit liegt. Danach werden umfangreiche Messungen an PCM- und Deltamodulationssystemen vorgestellt und mit in der Literatur angegebenen Ergebnissen bzw. eigenen Berechnungen verglichen. Dabei ergeben sich bei einem gaußverteilten Modellsignal mit "sprachähnlichem" Spektrum gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung. Dagegen weichen die Meßergebnisse bei einem K_0-verteilten Signal, das sprachähnliche Eigenschaften besitzt ("fast" sphärisch invarianter Prozeß), stark von der Theorie ab, da die Verzerrungsanteile, die durch die langsamen Dynamikschwankungen des Signals entstehen, nicht von diesem Meßverfahren erfaßt werden.

Dies bedeutet, daß nur die nichtlinearen Verzerrungsanteile gemessen werden, die auch subjektiv als Verzerrung ("Klirren") empfunden werden.

A.1 Herleitung der Gleichung (2.16)

In Gleichung (2.15) ist der Erwartungswert eines Quadrats eines Integrals zu bilden. Man erhält mit der Substitution $t_2 = t_1 + \tau$

$$E\{(\frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1)^2\} =$$

$$= E\{\frac{1}{T^2}\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{t_2=t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)x_n^2(t_2)dt_1dt_2\}$$

$$= E\{\frac{1}{T^2}\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{\tau=t_o-t_1-T}^{t_o-t_1} x_n^2(t_1)x_n^2(t_1+\tau)dt_1d\tau\}$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{\tau=t_o-t_1-T}^{t_o-t_1} E\{x_n^2(t_1)\cdot x_n^2(t_1+\tau)\}dt_1d\tau$$

Da $x_n(t_1)$ stationär angenommen wird, hängt der Erwartungswert nicht von t_1 ab, so daß das Integral $\int\ldots dt_1$ gelöst werden kann. Betrachtet man den Integrationsbereich in Bild A 1.1, erkennt man, daß folgende Umformung gilt

$$\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{\tau=t_o-t_1-T}^{t_o-t_1}\ldots dt_1d\tau =$$

$$= \int_{\tau=0}^{T}\int_{t_1=t_o-T}^{t_o-\tau}\ldots dt_1d\tau + \int_{\tau=-T}^{0}\int_{t_1=t-T-\tau}^{t}\ldots dt_1d\tau$$

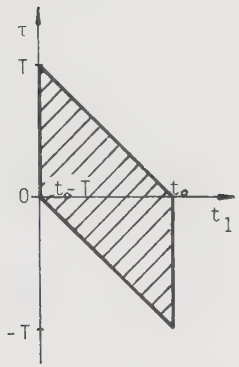


Bild A 1.1: Integrationsbereich

Da der Integrand nur von τ abhängt, gilt dann

$$E\{(\frac{1}{T}\int_{t_o-T}^{t_o} x_n^2(t_1)dt_1)^2\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\tau)\, E\{x_n^2(t_1)\cdot x_n^2(t_1+\tau)\}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{0} (T+\tau)\, E\{x_n^2(t_1)\cdot x_n^2(t_1+\tau)\}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} (1-\frac{|\tau|}{T})\, E\{x_n^2(t_1)\cdot x_n^2(t_1+\tau)\}d\tau$$

womit direkt Gleichung (2.16) folgt.

A.2 Herleitung der Gleichung (2.36)

In Gleichung (2.35 a) muß abgesehen von dem Vorfaktor $1/(Ta_1 \sin \omega_m t_\Delta)^2$ folgender Erwartungswert berechnet werden

$$E\{\Big(\int_{t_o-T}^{t_o}[\cos\omega_m(t_1-t_\Delta)x_n(t_1) - \cos\omega_m t_1 \cdot x_n(t_1-t_\Delta)]dt_1\Big)^2\}$$

$$= E\{\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{t_2=t_o-T}^{t_o}[\cos\omega_m(t_1-t_\Delta)x_n(t_1)-\cos\omega_m t_1 \cdot x_n(t_1-t_\Delta)] \cdot$$

$$\cdot [\cos\omega_m(t_2-t_\Delta)x_n(t_2)-\cos\omega_m t_2 \cdot x_n(t_2-t_\Delta)]dt_1 dt_2\}$$

Setzt man $t_2=t_1+\tau$, vertauscht man Integration und Erwartungswertbildung, so erhält man nach Ausmultiplikation

$$\int_{t_1=t_o-T}^{t_o}\int_{\tau=t_o-T-t_1}^{t_o-t_1}[\cos\omega_m(t_1-t_\Delta)\cos\omega_m(t_1+\tau-t_\Delta)E\{x_n(t_1)x_n(t_1+\tau)\} -$$

$$- \cos\omega_m(t_1-t_\Delta)\cos\omega_m(t_1+\tau)E\{x_n(t_1)x_n(t_1+\tau-t_\Delta)\} -$$

$$- \cos\omega_m(t_1)\cos\omega_m(t_1+\tau-t_\Delta)E\{x_n(t_1-t_\Delta)x_n(t_1+\tau)\} +$$

$$+ \cos\omega_m(t_1)\cos\omega_m(t_1+\tau)E\{x_n(t_1-t_\Delta)x_n(t_1+\tau-t_\Delta)\}]dt_1 d\tau$$

Bei Stationarität des Signals x_n hängen die Erwartungswerte nicht von der Zeit t_1 ab. Nach Ausmultiplikation der Cosinusterme erhält man

$$\frac{1}{2} \int_{t_1=t_o-T}^{t_o} \int_{\tau=t_o-T-t_1}^{t_o-t_1} [\varphi_{xx}(\tau)(\cos\omega_m\tau + \cos\omega_m(2t_1-2t_\Delta+\tau)) -$$

$$- \varphi_{xx}(\tau-t_\Delta)(\cos\omega_m(\tau+t_\Delta)+\cos\omega_m(2t_1-t_\Delta+\tau)) -$$

$$- \varphi_{xx}(\tau+t_\Delta)(\cos\omega_m(\tau-t_\Delta)+\cos\omega_m(2t_1-t_\Delta+\tau)) +$$

$$+ \varphi_{xx}(\tau)(\cos\omega_m\tau + \cos\omega_m(2t_1+\tau))]dt_1 d\tau$$

Betrachtet man den Integrationsbereich in Bild A 2.1, läßt sich erkennen, daß folgende Substitution gilt :

$$\int_{t_1=t_o-T}^{t_o} \int_{\tau=t_o-T-t_1}^{t_o-t_1} \ldots dt_1 d\tau =$$

$$= \int_{\tau=0}^{T} \int_{t_1=t_o-T}^{t_o-\tau} \ldots dt_1 d\tau + \int_{\tau=-T}^{0} \int_{t_1=t_o-T-\tau}^{t_o} \ldots dt_1 d\tau$$

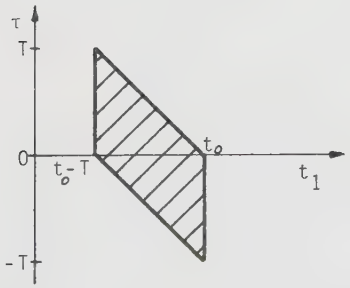


Bild A 2.1 : Integrationsbereich

Nach Ausführung der Integration $\int dt_1$ erhält man dann

$$\int_{-T}^{T} (T-|\tau|)\,[\,\varphi_{xx}(\tau)\cos\omega_m\tau - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau+t_\Delta)\cos\omega_m(\tau-t_\Delta) - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau-t_\Delta)\cos\omega_m(\tau+t_\Delta)\,]\,d\tau +$$

$$+ \int_{-T}^{T} \frac{1}{4\omega_m}[\varphi_{xx}(\tau)(\sin\omega_m(2t-|\tau|-2t_\Delta)-\sin\omega_m(2t-2T+|\tau|-2t_\Delta))-$$

$$- \varphi_{xx}(\tau+t_\Delta)(\sin\omega_m(2t-|\tau|-t_\Delta)-\sin\omega_m(2t-2T+|\tau|-t_\Delta))-$$

$$- \varphi_{xx}(\tau-t_\Delta)(\sin\omega_m(2t-|\tau|-t_\Delta)-\sin\omega_m(2t-2T+|\tau|-t_\Delta))+$$

$$+ \varphi_{xx}(\tau)(\sin\omega_m(2t-|\tau|)-\sin\omega_m(2t-2T+|\tau|))]d\tau$$

Durch eine trigonometrische Umformung ergibt sich nach einer Zusammenfassung

$$T \int_{-T}^{T} \{(1-\frac{|\tau|}{T})[\varphi_{xx}(\tau)\cos\omega_m\tau - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau+t_\Delta)\cos\omega_m(\tau-t_\Delta) - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau-t_\Delta)\cos\omega_m(\tau+t_\Delta)] +$$

$$+ \frac{1}{\omega_m T}\sin\omega_m(T-|\tau|)\cos\omega_m(2t-T-t_\Delta)\cdot$$

$$[\varphi_{xx}(\tau)\cos\omega_m t_\Delta - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau+t_\Delta) - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{xx}(\tau-t_\Delta)]\}d\tau$$

(A 2.1)

Für die Berechnung von $\mathrm{Var}\{\hat{I}\}$ ergibt sich der gleiche Ausdruck, nur daß der zweite Term in Gleichung (A 2.1) ein negatives Vorzeichen besitzt.

A.3 Pole und Nullstellen der Prototypfilter, Skalierungsfaktoren und Anordnung

a) Prototyphochpaß zur Erzeugung der Bandsperre

Radien und Winkel der Pole und Nullstellen

ν	$\Omega_{\infty\nu}$	$\rho_{\infty\nu}$	$\Omega_{0\nu}$
1	0,0656428294	0,9865020908	0,0097654881
2	0,0661640308	0,9227976918	0,0040703836

Durch die Transformation entstehen aus einer Polstelle (Nullstelle) zwei Pole (Nullstellen), wobei diejenigen mit dem kleineren Winkel den zusätzlichen Index $\mu = 1$ erhalten soll und die mit dem größeren Winkel den Index $\mu = 2$. Dadurch läßt sich mit der Reihenfolge der Skalierungsfaktoren $b_{2\nu\mu}$ die Reihenfolge der Blöcke 2. Grades angeben, da die "feste Zuordnung" /15/ der Pole und Nullstellen erfolgt.

$$b_{212} = 0{,}234375$$

$$b_{211} = 1{,}703125$$

$$b_{221} = 0{,}7065429688$$

$$b_{222} = 3{,}25$$

b) Prototyptiefpaß zur Erzeugung des Bandpasses

ν	$\Omega_{\infty\nu}$	$\rho_{\infty\nu}$	$\Omega_{0\nu}$
1	0,0024814518	0,9964176468	0,0737969045
2	0,0080456168	0,9973895568	0,0262510871
3	"	"	0,0181287341
4	"	"	0,0157079303

$b_{212} = 0{,}241943$

$b_{221} = 0{,}439941$

$b_{222} = 0{,}270020$

$b_{231} = 0{,}475098$

$b_{242} = 0{,}485107$

$b_{241} = 0{,}524902$

$b_{232} = 0{,}389893$

$b_{211} = 0{,}132568$

A.4 Zusammenhang zwischen Gleichung (2.68) und Gleichung (2.69)

Definition: $\Delta\tau = l/f_A$

$\Delta\omega = 2\pi f_A/l$

$$p(\tau) = \Delta\tau \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau-\nu\Delta\tau)$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(\tau)\} = 2\pi \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\omega-\mu\Delta\omega)$$

$$\mathrm{Var}\{\hat{\Phi}_{nn}(\omega_m)\} \cdot \frac{\Delta\omega^2 T}{2\pi^2} <$$

$$< \Delta\tau \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}{}^2(\nu\Delta\tau) =$$

$$= \Delta\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}{}^2(\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau-\nu\Delta\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}{}^2(\tau) \cdot p(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(t-\tau) \cdot [\varphi_{xx}(\tau) \cdot p(\tau)]\,d\tau \Big|_{t=0}$$

$$= \varphi_{xx}(\tau) * [\varphi_{xx}(\tau) \cdot p(\tau)] \Big|_{t=0}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{\Phi_{xx}(\tau) \cdot [\frac{1}{2\pi} \Phi_{xx}(\omega) * P(\omega)]\} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cdot [\frac{1}{2\pi} \Phi_{xx}(\omega) * P(\omega)] e^{j\omega t}\,d\omega \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega-\mu\Delta\omega)\,d\omega$$

w. z. b. w.

A.5 Herleitung der Gleichung (2.73)

In Gleichung (2.72a) muß abgesehen von dem Vorfaktor $1/(Na_1 \sin\lambda\Omega_m)^2$ folgender Erwartungswert berechnet werden:

$$E\{[\sum_{\nu=0}^{N-1} \cos\Omega_m(k-\nu l-\lambda)x_n(\frac{k-\nu l}{f_A}) - \cos\Omega_m(k-\nu l)x_n(\frac{k-\nu l-\lambda}{f_A})]^2\}$$

$$= E\{\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\nu_1=0}^{N-1} [\cos\Omega_m(k-\nu l-\lambda)x_n(\frac{k-\nu l}{f_A}) -$$

$$- \cos\Omega_m(k-\nu l)x_n(\frac{k-\nu l-\lambda}{f_A})] \cdot$$

$$\cdot[\cos\Omega_m(k-\nu_1 l-\lambda)x_n(\frac{k-\nu_1 l}{f_A}) -$$

$$- \cos\Omega_m(k-\nu_1 l)x_n(\frac{k-\nu_1 l-\lambda}{f_A})]\}$$

Setzt man $\nu_1 = \nu + \eta$, vertauscht man Summation und Erwartungswertbildung, so erhält man nach Ausmultiplikation

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\eta=-\nu}^{N-1-\nu} [\cos\Omega_m(k-\nu l-\lambda)\cos\Omega_m(k-\nu l-\eta l-\lambda)\cdot$$

$$\cdot E\{x_n(\frac{k-\nu l}{f_A})x_n(\frac{k-\nu l-\eta l}{f_A})\} -$$

$$- \cos\Omega_m(k-\nu l)\cos\Omega_m(k-\nu l-\eta l-\lambda)\cdot$$

$$\cdot E\{x_n(\frac{k-\nu l-\lambda}{f_A})x_n(\frac{k-\nu l-\eta l}{f_A})\} -$$

$$- \cos\Omega_m(k-\nu l-\lambda)\cos\Omega_m(k-\nu l-\eta l) \cdot$$

$$\cdot E\{x_n(\frac{k-\nu l}{f_A})x_n(\frac{k-\nu l-\eta l-\lambda}{f_A})\} +$$

$$+ \cos\Omega_m(k-\nu l)\cos\Omega_m(k-\nu l-\eta l) \cdot$$

$$\cdot E\{x_n(\frac{k-\nu l-\lambda}{f_A})x_n(\frac{k-\nu l-\eta l-\lambda}{f_A})\}]$$

Bei Stationarität des Signals $x_n(\frac{k}{f_A})$ hängen die Erwartungswerte nicht von der "Zeit" $\frac{k}{f_A}$ ab.

Nach Ausmultiplikation der Cosinusterme erhält man dann

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\eta=-\nu}^{N-1-\nu}[\varphi_{xx}(\frac{\eta l}{f_A})(\cos\Omega_m\eta l+\cos\Omega_m(2k-2\nu l-\eta l-2\lambda))-$$

$$- \varphi_{xx}(\frac{\eta l-\lambda}{f_A})(\cos\Omega_m(\eta l+\lambda)\cos\Omega_m(2k-2\nu l-\eta l-\lambda)) -$$

$$- \varphi_{xx}(\frac{\eta l+\lambda}{f_A})(\cos\Omega_m(\eta l-\lambda)+\cos\Omega_m(2k-2\nu l-\eta l-\lambda)) +$$

$$+ \varphi_{xx}(\frac{\eta l}{f_A})(\cos\Omega\eta l+\cos\Omega_m(2k-2\nu l-\eta l))]$$

Betrachtet man den Summationsbereich in Bild A 5.1 läßt sich erkennen, daß folgende Substitution gilt

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\eta=-\nu}^{N-1-\nu} = \sum_{\eta=0}^{N-1}\sum_{\nu=0}^{N-1-\eta} + \sum_{\eta=-1}^{1-N}\sum_{\nu=-\eta}^{N-1}$$

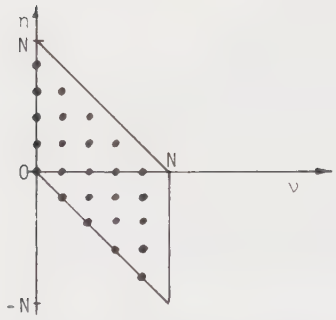


Bild A 5.1 : Summationsbereich

Bei Ausführung der Summation $\sum_{\nu}$ erhält man mit der Beziehung

$$\sum_{\nu=i}^{j} \cos(\nu\Omega+\varphi) = (\sin\tfrac{\Omega}{2})^{-1} \cdot \sin\frac{\Omega(1+j-i)}{2} \cos(\frac{\Omega(i+j)}{2}+\varphi)$$

folgenden Ausdruck

$$\sum_{\eta=1-N}^{N-1} (N-|\eta|)[\varphi_{xx}(\frac{\eta l}{f_A}) \cos\Omega_m \eta l -$$

$$- \tfrac{1}{2} \varphi_{xx}(\frac{\eta l-\lambda}{f_A}) \cos\Omega_m(\eta l+\lambda) -$$

$$- \tfrac{1}{2} \varphi_{xx}(\frac{\eta l+\lambda}{f_A}) \cos\Omega_m(\eta l-\lambda)] +$$

$$+ \sum_{\eta=1-N}^{N-1} \frac{\sin\Omega_m l(N-|\eta|)}{2\sin\Omega_m l}[\varphi_{xx}(\frac{\eta l}{f_A})\cos\Omega_m(2k-l(N-1)-2\lambda) -$$

$$- \varphi_{xx}(\frac{\eta l-\lambda}{f_A}) \cos\Omega_m(2k-l(N-1)-\lambda) -$$

$$- \varphi_{xx}(\frac{\eta l+\lambda}{f_A}) \cos\Omega_m(2k-l(N-1)-\lambda) +$$

$$+ \varphi_{xx}(\frac{\eta l}{f_A}) \cos\Omega_m(2k-l(N-1))]$$

Durch eine trigonometrische Umformung und Zusammenfassung erhält man :

$$\sum_{\eta=1-N}^{N-1} (N-|\eta|)\Big[\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l}{f_A}\Big)\cos\Omega_m \eta l -$$

$$- \frac{1}{2}\,\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l-\lambda}{f_A}\Big)\cos\Omega_m(\eta l+\lambda) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l+\lambda}{f_A}\Big)\cos\Omega_m(\eta l-\lambda)\Big] +$$

$$+ \sum_{\eta=1-N}^{N-1} \frac{\sin\Omega_m l(N-|\eta|)}{\sin\Omega_m l} \cdot \cos\Omega_m(2k-l(N-1)-\lambda) \cdot$$

$$\cdot \Big[\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l}{f_A}\Big) \cdot \cos\Omega\lambda - \frac{1}{2}\,\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l+\lambda}{f_A}\Big) - \frac{1}{2}\,\varphi_{xx}\Big(\frac{\eta l-\lambda}{f_A}\Big)\Big]$$

Bei der Berechnung von Var $\{\hat{I}\}$ ergibt sich der gleiche Ausdruck, wobei die zweite Summe jedoch ein negatives Vorzeichen besitzt.

A.6 Zusammenhang zwischen Gleichung (2.76) und Gleichung (2.77)

Definition: $\Delta\tau = \iota / f_A$

$$\Delta\omega = 2\pi f_A / \iota$$

$$p(\tau) = \Delta\tau \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau - \eta\Delta\tau)$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(\tau)\} = 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\omega - \mu\Delta\omega)$$

$$\Delta\tau \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1(\eta\Delta\tau) = \Delta\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1(\tau) \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau - \eta\Delta\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1(\tau) \cdot p(\tau)\, d\tau$$

$$= \mathcal{F}\{\tilde{\varphi}_1(\tau) \cdot p(\tau)\}\Big|_{\omega=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Phi_1(\omega) * P(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$= \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\eta\Delta\omega)$$

Mit

$$\tilde{\Phi}_1(\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{\varphi}_1(\tau)\}$$

$$= \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau) \cos\omega_m\tau -$$

$$- \frac{1}{2} \varphi_{xx}(\tau + t_0) \cdot \cos\omega_m(\tau - t_0) -$$

$$- \frac{1}{2} \varphi_{xx}(\tau - t_0) \cdot \cos\omega_m(\tau + t_0)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi_{xx}(\omega-\omega_m) + \Phi_{xx}(\omega+\omega_m)\right] -$$

$$- \frac{1}{4}\left[e^{j(\omega-2\omega_m)t_0}\cdot\Phi_{xx}(\omega-\omega_m) + e^{j(\omega+2\omega_m)t_0}\cdot\Phi_{xx}(\omega+\omega_m) +\right.$$

$$\left. + e^{-j(\omega-2\omega_m)t_0}\cdot\Phi_{xx}(\omega-\omega_m) + e^{-j(\omega+2\omega_m)t_0}\cdot\Phi_{xx}(\omega+\omega_m)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\Phi_{xx}(\omega-\omega_m)\left[1-\cos(\omega-2\omega_m)t_0\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\Phi_{xx}(\omega+\omega_m)\left[1-\cos(\omega+2\omega_m)t_0\right]$$

erhält man

$$\Delta\tau \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1(\eta\Delta\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left(\Phi_{xx}(\omega_m-\mu\Delta\omega)\left[1-\cos(\mu\Delta\omega-2\omega_m)t_0\right] +\right.$$

$$\left. + \Phi_{xx}(\omega_m+\mu\Delta\omega)\left[1-\cos(\mu\Delta\omega+2\omega_m)t_0\right]\right)$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega_m-\mu\Delta\omega)\left[1-\cos(2\omega_m-\mu\Delta\omega)t_0\right]$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 2\cdot\Phi_{xx}(\omega_m-\mu\Delta\omega)\cdot\sin^2(\omega_m-\mu\,\frac{\Delta\omega}{2})$$

A.7 Zusammenhang zwischen den Gleichungen (3.31) und (3.33)

Zur Vereinfachung der Doppelsumme in Gleichung (3.31) sind alle $\varkappa$,

$$|\varkappa| \leq \frac{N-1}{2} \qquad \text{(A 7.1)}$$

zu ermitteln, für die $|\lambda| < w$ gilt, mit

$$\lambda = l\varkappa + \nu N \quad . \qquad \text{(A 7.2)}$$

Da alle Größen ganze Zahlen sind, handelt es sich hier um eine diophantische Gleichung, deren Eigenschaften und Lösungen z. B. in /31/ angegeben sind.

- Die Gleichung (A 7.2) ist lösbar, wenn jeder gemeinsame Teiler von l und N auch Teiler von λ ist.

Diese Bedingung ist immer erfüllt, da l und N teilerfrei sind.

- Ist k_o, ν_o eine Lösung der Gleichung (A 7.2), so erhält man die unendlich vielen Lösungen der Gleichung mit

$$k_\eta = k_o + \eta N \quad ,$$

$$\nu_\eta = \nu_o - \eta l \quad , \quad \eta \in \mathbb{Z} \qquad \text{(A 7.3)}$$

falls l und N teilerfrei sind.

Mit dem beschränkten Wertebereich von $\varkappa$ (Gleichung (A 7.1)) und der Beziehung (A 7.3) erkennt man, daß für jedes λ genau eine Lösung existiert.

- Ist k_o ein Teil einer Lösung von Gleichung (A 7.2), so gehört k_o auch zu Lösungen der Gleichungen

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \mu \cdot N = \iota\kappa + \nu N \qquad \mu \in \mathbb{Z} \qquad \text{(A 7.4)}$$

Wegen $|\lambda| < \frac{N}{2}$ (was aus $|\lambda| < w \leq m$ folgt) ist k_o nur Teillösung für genau ein λ.
Damit ist nachgewiesen, daß ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen den (eingeschränkten) Werten von λ und den (eingeschränkten) Werten von k_o und damit von ν_o besteht.

- Eine Lösung der Gleichung (A 7.2) erhält man mit dem euklidischen Algorithmus (näheres siehe /31/).

In der Praxis dürfte es jedoch einfacher sein, durch Probieren mit ι Werten für ν die Lösung zu finden.

k_o und ν_o stehen im folgenden für die Lösung der Gleichung (A 7.2) mit $\lambda = 1$ unter Berücksichtigung von Gleichung (A 7.1). Den Wert k_o erhält man dadurch, daß die Forderung

$$k_o = \frac{1 - \nu_o N}{\iota} \quad ! \quad \in \mathbb{Z} \qquad \text{(A 7.5)}$$

für alle ν_o, $-\frac{\iota}{2} < \nu_o \leq \frac{\iota}{2}$ überprüft wird.

Die Lösungen für $\lambda \neq 1$, $|\lambda| < w$ erhält man wie folgt

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\iota k_o + \nu_o N) \\ &= \iota(\lambda k_o) + (\lambda \nu_o)N \\ &= \iota(\lambda k_o + \eta_\lambda N) + (\lambda \nu_o - \eta_\lambda \iota)N \end{aligned} \qquad \text{(A 7.6)}$$

mit $|\lambda k_o + \eta_\lambda N| \leq \frac{N-1}{2}$

Die Doppelsumme aus Gleichung (3.31) läßt sich jetzt wie folgt umformen :

$$\sum_{\kappa=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_{oo}(l\kappa+\nu N)\cos(\mu\kappa\,\frac{2\pi}{N})$$

$$= \sum_{\lambda=1-w}^{w-1} \varphi_{oo}(\lambda)\cos(\mu(\lambda k_o+\eta_\lambda N)\frac{2\pi}{N})$$

$$= \sum_{\lambda=1-w}^{w-1} \varphi_{oo}(\lambda)\cos(\mu\lambda k_o\frac{2\pi}{N}) \qquad \text{(A 7.7)}$$

Eine betragsmäßige Abschätzung für k_o erhält man aus Gleichung (A 7.5). Nachdem $\nu_o = 0$ keine Lösung ist, (gehört zu $\lambda = 0$) wird der Wert $|k_o|$ minimal, wenn $\nu_o = 1$ eine Lösung ist. Daraus folgt mit Gleichung (A 7.1)

$$\frac{N-1}{2} \geq |k_o| \geq \frac{N-1}{l} \qquad \text{(A 7.8)}$$

A.8 Verlauf der Verteilungsdichte bei Polynomapproximation der Transformationskennlinie

Aus den Gleichungen (3.48) und (3.52) erhält man (der Intervall-Index ν sei zur Vereinfachung weggelassen) :

- Lineare Interpolation

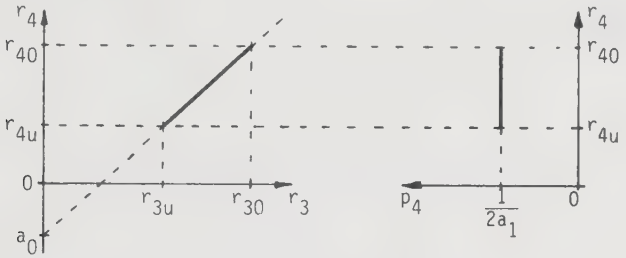


Bild A 8.1 : Ermittlung der Verteilungsdichte von $r_4(k)$ bei linearer Interpolation

$$r_4 = f_1(r_3) = a_0 + a_1 r_3 \qquad \text{(A 8.1)}$$

$$f_1'(r_3) = a_1 \qquad ; \; r_{3u} \leq r_3 < r_{30}$$

$$p_4(r_4) = \frac{1}{2a_1} \qquad ; \quad f_1(r_{3u}) \leq r_4 < f_1(r_{30}) \qquad \text{(A 8.2)}$$

Die Verteilungsdichte ist somit bereichsweise konstant (vergleiche Bild A 8.1). Wegen der Vorgabe der Stützpunkte r_{4u} und r_{40} ermitteln sich die Polynomkoeffizienten zu

$$a_0 = \frac{r_{4u} \cdot r_{30} - r_{40} \cdot r_{3u}}{r_{30} - r_{3u}}$$

$$a_1 = \frac{r_{40} - r_{4u}}{r_{30} - r_{3u}} > 0 \qquad \text{(A 8.3)}$$

Die Forderung der Gleichung (3.53) ist damit erfüllt.

- Quadratische Interpolation

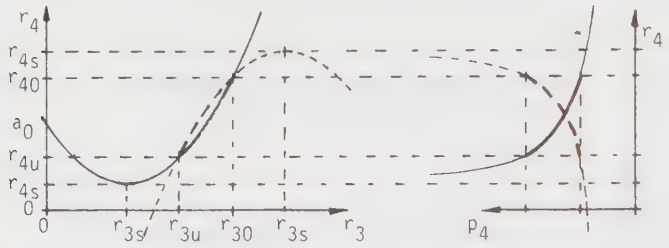


Bild A 8.2 : Ermittlung der Verteilungsdichte von $r_4(k)$ bei quadratischer Interpolation

$$r_4 = f_2(r_3) = a_0 + a_1 r_3 + a_2 r_3^2$$

$$= r_{4s} + a_2 (r_3 - r_{3s})^2 \quad ;$$

$$r_{3u} \leq r_3 < r_{30} \qquad \text{(A 8.4)}$$

(r_{3s}, r_{4s}) ist der Scheitel der Parabel f_2 :

$$r_{3s} = -\frac{a_1}{2a_2}$$

$$r_{4s} = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

$$f_2'(r_3) = 2 \cdot a_2 (r_3 - r_{3s}) \quad ; \quad r_{3u} \leq r_3 < r_{30}$$

$$r_3 = f_2^{-1}(r_4) = r_{3s} \pm \sqrt{\frac{r_4 - r_{4s}}{a_2}} \qquad \text{(A 8.5)}$$

Dabei erfüllt nur die Lösung mit der positiven Wurzel die Bedingung (3.53).

$$p_4(r_4) = \frac{1}{4\sqrt{a_2(r_4 - r_{4s})}} \quad ;$$

$$f_2(r_{3u}) \leq r_4 < f_2(r_{30}) \qquad \text{(A 8.6)}$$

Damit die Wurzel reell ist, muß gelten

$$r_4 \geq r_{4u} > r_{4s} \quad \text{falls} \quad a_2 > 0$$

bzw.

$$r_4 < r_0 < \tilde{r_{4s}} \quad \text{falls} \quad a_2 < 0 \qquad \text{(A 8.7)}$$

In Bild A 8.2 erkennt man, daß das Vorzeichen von a_2 die Steigung der Verteilungsdichtefunktion p_4 bestimmt und deren Krümmung immer positiv ist :

$$\frac{d}{dr_4} p_4(r_4) = \frac{-a_2}{8(\sqrt{a_2(r_4 - r_{4s})})^3} \gtrless 0$$

$$\text{für} \quad a_2 \gtrless 0$$

$$\frac{d^2}{dr_4^2} p_4(r_4) = \frac{3a_2^2}{16(\sqrt{a_2(r_4 - r_{4s})})^5} > 0$$

Bei Vorgabe der Stützwerte r_{4u}, r_{40} erhält man z. B. folgende Polynomkoeffizienten

$$a_0 = \frac{r_{4u}r_{30} - r_{40}r_{3u}}{r_{30} - r_{3u}} + a_2 r_{3u} r_{30}$$

$$a_1 = \frac{r_{40} - r_{4u}}{r_{30} - r_{3u}} - a_2(r_{30} + r_{3u}) \qquad \text{(A 8.8)}$$

Für den freien Koeffizienten a_2 erhält man mit der Bedingung (A 8.7) die Ungleichung

$$0 < |a_2| < \frac{a_1^2}{4(a_0 - r_{4u})} = \frac{r_{40} - r_{4u}}{(r_{30} - r_{3u})^2} \qquad \text{(A 8.9)}$$

Für die Scheitelkoordinate r_{4s} erhält man

$$\frac{r_{4s}}{a_2} = - \left(\frac{r_{40} - r_{4u}}{2a_2(r_{30} - r_{3u})} \right)^2 + \frac{r_{40} + r_{4u}}{2a_2} - \left(\frac{r_{30} - r_{3u}}{2} \right)^2$$

- Kubische Interpolation

$$r_4 = f_3(r_3) = a_0 + a_1 r_3 + a_2 r_3^2 + a_3 r_3^3$$

$$= r_{4w} + \alpha(r_3 - r_{3w}) + a_3(r_3 - r_{3w})^3$$

$$r_{3u} \leq r_3 < r_{30} \qquad \text{(A 8.10)}$$

mit $\alpha = a_1 - \frac{a_2^2}{3a_2}$

(r_{3w}, r_{4w}) ist der Wendepunkt der Parabel f_3

$$r_{3w} = - \frac{a_2}{3a_3}$$

$$r_{4w} = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3a_3} + \frac{2a_2^3}{27a_3^2}$$

$$f_3'(r_3) = \alpha + 3a_3(r_3 - r_{3w})^2$$

$$r_{3u} \leq r_3 < r_{30} \qquad \text{(A 8.11)}$$

Zur Ermittlung der Umkehrfunktion muß eine Gleichung 3. Grades gelöst werden (z. B. /36/). Mit der Cardanischen Lösungsformel und Einsetzen in Gleichung (A 8.11) ergibt sich nach einer Zwischenrechnung

$$f_3'(f_3^{-1}(r_4)) = \alpha + (\gamma_1 + \gamma_2)^2$$

mit $$\gamma_{1,2} = \sqrt[3]{\beta \pm \sqrt{\beta^2+\alpha^3}\cdot e^{\pm j\nu 120°}} \quad ; \nu = 0,1,2$$

$$\beta = \frac{2}{3}\sqrt{3a_3}\,(r_4 - r_{4w}) \qquad \text{(A 8.12)}$$

wobei nur eine reelle der drei Lösungen interessiert.

$$p_4(r_4) = \frac{1}{2(\alpha+(\gamma_1+\gamma_2)^2)} \quad ; \quad f_3(r_{3u}) \leq r_4 < f_3(r_{30}) \qquad \text{(A 8.13)}$$

Für den Fall

$$\alpha > 0 \wedge a_3 > 0 \qquad \text{(A 8.14)}$$

ist die Parabel f_3 streng monoton steigend (vergleiche Bild A 8.3), und man erhält die reelle Lösung in Gleichung (A 8.12) für $\nu = 0$

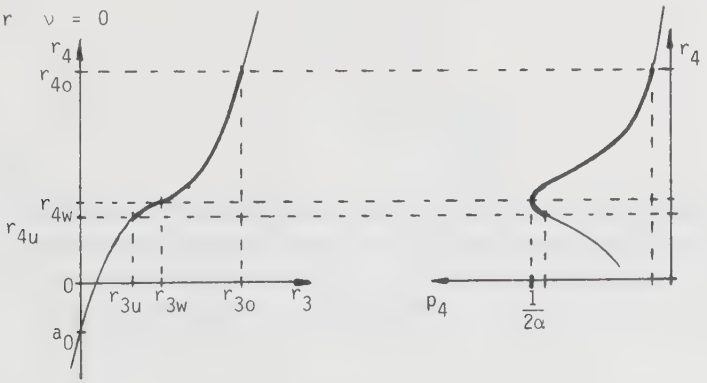


Bild A 8.3 : Ermittlung der Verteilungsdichte von $r_4(k)$ kubischer Interpolation

Speziell für $r_4 = r_{4w}$ gilt

$$p_4(r_{4w}) = p_4\Big|_{r_3=r_{3w}} = \frac{1}{2\alpha}$$

Bei Vorgabe der Stützwerte r_{4u}, r_{40} erhält man z. B. folgende Polynomkoeffizienten

$$a_0 = \frac{r_{4u}r_{30} - r_{40}r_{3u}}{r_{30} - r_{3u}} + r_{30}r_{3u}(a_2+a_3(r_{30}+r_{3u}))$$

$$a_1 = \frac{r_{40} - r_{4u}}{r_{30} - r_{3u}} - a_2(r_{30}+r_{3u}) - a_3(r_{30}^2+r_{30}r_{3u}+r_{3u}^2)$$

(A 8.15)

Die beiden freien Koeffizienten a_2 und a_3 sind so zu bestimmen, daß die Bedingung (A 8.14) erfüllt ist :

$$0 < \alpha \leq \alpha_{max}(a_3) < \frac{r_{40} - r_{4u}}{r_{30} - r_{3u}}$$

$$0 < a_3 < 4 \cdot \frac{r_{40} - r_{4u}}{(r_{30}-r_{3u})^3} \qquad \text{(A 8.15)}$$

Falls entweder $\alpha \leq 0$ oder $a_3 < 0$ gewählt wird, sind die Koeffizienten a_2 und a_3 so zu bestimmen, daß das Polynom $f_3(r_3)$ zwischen den Stützpunkten streng monoton steigt, also Bedingung (3.53) erfüllt ist.

A.9 Herleitung der Gleichung (3.74)

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird angenommen, daß die Varianzen der gleich- und gaußverteilten Folgen gleich Eins sind, so daß das Ergebnis unmittelbar für die normierten Autokorrelationsfunktionen gilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei außerdem das gaußverteilte Signal mit y(k) und das gleichverteilte mit x(k) bezeichnet. Dann gilt:

$$p_y(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{v^2}{2})$$

$$p_x(u) = \frac{1}{\sqrt{12}} \qquad \text{für} \quad |u| < \sqrt{3}$$

$$0 \qquad \text{sonst}$$

$$y = f(x) = \sqrt{2}\ \mathrm{erf}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{3}\ \mathrm{erf}(\frac{y}{\sqrt{2}}) =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \int_0^y \exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

Um die Koeffizienten c_n^2 in Gleichung (3.11) zu erhalten, werden die Gleichungen (3.12) und (3.13) angesetzt :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sqrt{\frac{6}{\pi}} \int_0^y \exp(\frac{-t^2}{2})dt] \cdot$$

$$\cdot [\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \exp(\frac{y^2}{2}) \frac{d^n}{dy^n} (\exp(\frac{-y^2}{2}))] \cdot$$

$$\cdot \exp(\frac{-y^2}{2})\, dy$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{3}{n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{y} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt \cdot \frac{d^n}{dy^n} \left(\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right) dy$$

Dieses Integral ist nur dann von Null verschieden, wenn der Integrant gerade ist. Da die Kennlinie f^{-1} ungerade ist, muß auch $H_n(y)$ ungerade sein, was nur bei ungeradem n gegeben ist. Deshalb gilt

$$c_n = 0 \qquad \text{für} \quad n \quad \text{gerade}$$

Partielle Integration ergibt

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{3}{n!}} \left\{ \left[\int_{0}^{y} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt \cdot \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right) dy \right\}$$

Der erste Summand ist Null, der zweite wird mit Gleichung (3.13) umgeformt

$$c_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right)^2 H_{n-1}(y) dy$$

Durch Einsetzen der expliziten Darstellung von $H_{n-1}(y)$ erhält man

$$c_n = \frac{\sqrt{3n!}}{\pi n} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^\nu}{\nu! 2^\nu (n-1-2\nu)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) y^{n-1-2\nu} dy$$

für n ungerade

Nach der Substitution $y = z/\sqrt{2}$ läßt sich das Integral mit Gleichung (3.82) auflösen.

$$c_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3n!}{\pi 2^{n-1}}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-1-2\nu)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \cdot z^{n-1-2\nu} dz$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3n!}{\pi 2^{n-1}}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-1-2\nu)!} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}-\nu} (2\mu-1)$$

$$= \frac{1}{n2^{n-1}}\sqrt{\frac{3n!}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-2)^\nu}{\nu!(\frac{n-1}{2}-\nu)!}$$

für n ungerade

Die Summe läßt sich mit dem binomischen Satz durch Einsetzen von $(1-2)^{(n-1)/2}$ und Erweitern mit $(\frac{n-1}{2})!$ auflösen

$$c_n = \frac{1}{n2^{n-1}}\sqrt{\frac{3n!}{\pi}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(\frac{n-1}{2})!} \quad \text{für n ungerade}$$

Die Koeffizienten c_n^2 der Gleichung (3.11) sind dann

$$c_n^2 = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{n!}{\left((\frac{n-1}{2})!2^{n-1}n\right)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^{1-n}}{\pi n} \cdot \frac{(n-1)!}{\left((\frac{n-1}{2})!2^{(n-1)/2}\right)^2}$$

$$= \frac{6 \cdot 2^{-n}}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (n-1)n}$$

für n ungerade

Vergleicht man diese Koeffizienten mit der Potenzreihenentwicklung der Arkussinusfunktion, so erkennt man, daß für die normierten Autokorrelationsfunktionen folgende Beziehung gilt :

$$\rho_{xx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1} \rho_{yy}^{2\nu+1}$$

$$= \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho_{yy}}{2}$$

Die Umkehrfunktion und damit die Beziehung (3.74) ist somit

$$\rho_{yy} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \rho_{xx} \right)$$

A.10 Approximationsformel für erfc(x) bzw. Q(x)

Zur numerischen Berechnung von in Kapitel 4 abgeleiteten Größen wird eine Approximationsformel für die Funktion

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2)dt$$

bzw. für

$$Q(x) = 1 - P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

gesucht. (Die Notation wurde wie in /6/ gewählt.) Üblicherweise geschieht die Approximation derart, daß der Faktor $\tilde{F}(x)$ bzw. $F(x)$ im Ausdruck

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \tilde{F}(x) \cdot \exp(-x^2)$$

bzw.

$$P(x) = 1 - F(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

für $x \geq 0$ durch einen Faktor $\tilde{F}_A(x)$ bzw. $F_A(x)$ angenähert wird.

Approximationen, bei denen der absolute Fehler in einer Schranke bleibt, haben hier den Nachteil, daß der Fehler bezogen auf erfc(x) bzw. Q(x) für große x beliebig groß werden kann. So ist die Approximation für erf(x) von Hastings(/45/, Blatt 45) zwar absolut auf $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ genau, aber für $x \to \infty$ beträgt der relative Fehler (bezogen auf erfc(x)) lediglich 0,379.

Es wurden verschiedene Ansätze für F(x) hinsichtlich des relativen Fehlers $\varepsilon(x)$ untersucht und optimiert. Die Fehlerdefinition war dabei

$$\varepsilon(x) = \max \left(\frac{Q_A(x) - Q(x)}{Q(x)} \;,\; \frac{Q(x) - Q_A(x)}{0{,}5 - Q(x)} \right)$$

Dies entspricht bei der Betrachtung einer Approximation von erf(x) dem Bezug des Fehlers auf erf(x) und erfc(x). Die Optimierung geschah so, daß

$$\varepsilon_{max} = \max \left(|\varepsilon(x)| \right) \stackrel{!}{=} \min \qquad \text{für} \quad x \geq 0$$

gilt, d. h. eine Minimierung des relativen Fehlers im tschebyscheff'schen Sinne.

Bezüglich der "Einfachheit", d. h. geringer Laufzeit am Digitalrechner, und der Koeffizientenanzahl ergibt sich folgendes Bild :

Ein Ansatz mit irrationalem $F_A(x)$ wie z. B. in /46/ ist zu aufwendig für die erzielbare Genauigkeit. Von den rationalen Ansätzen besitzt die Kettenbruchentwicklung bei bestimmter Genauigkeit die geringste Anzahl an Koeffizienten und die geringste Rechenzeit, falls eine Division höchstens die doppelte Rechenzeit einer Multiplikation beansprucht.

Für die Auswertung der in Kapitel 4 angegebenen Gleichungen wurde deshalb die Approximation

$$Q(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \cfrac{a_1}{x + \cfrac{a_2}{x + \quad \ddots \quad + \cfrac{a_{n-1}}{x + a_n}}}$$

gewählt. Für die Koeffizienten a_ν gilt speziell

$$a_1 = 1 + \varepsilon_{max}$$

und

$$\frac{\Pi a_{2\nu}-1}{\Pi a_{2\nu}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Die Koeffizienten und der maximale relative Fehler sind in der Tabelle A 10.1 angegeben.
Der betragsmäßige Verlauf des relativen Fehlers $\varepsilon(x)$ ist in Bild A 10.1 für den Kettenbruchansatz und für die Approximationen aus den beiden oben zitierten Literaturstellen sowie einer weiteren Literaturstelle /47/, für eine genaue aber aufwendige Approximation, aufgezeigt.

n	4	5	6
ε_{max}	$9{,}82 \cdot 10^{-4}$	$9{,}18 \cdot 10^{-5}$	$8{,}65 \cdot 10^{-6}$
a_1	1,000982183	1,000091822	1,000008654
a_2	1,078897047	1,011597733	1,001733164
a_3	4,709366918	2,350328179	2,069456470
a_4	3,486172984	9,001383156	3,883507782
a_5		4,855217063	14,82909284
a_6			6,294169990

Tabelle A 10.1

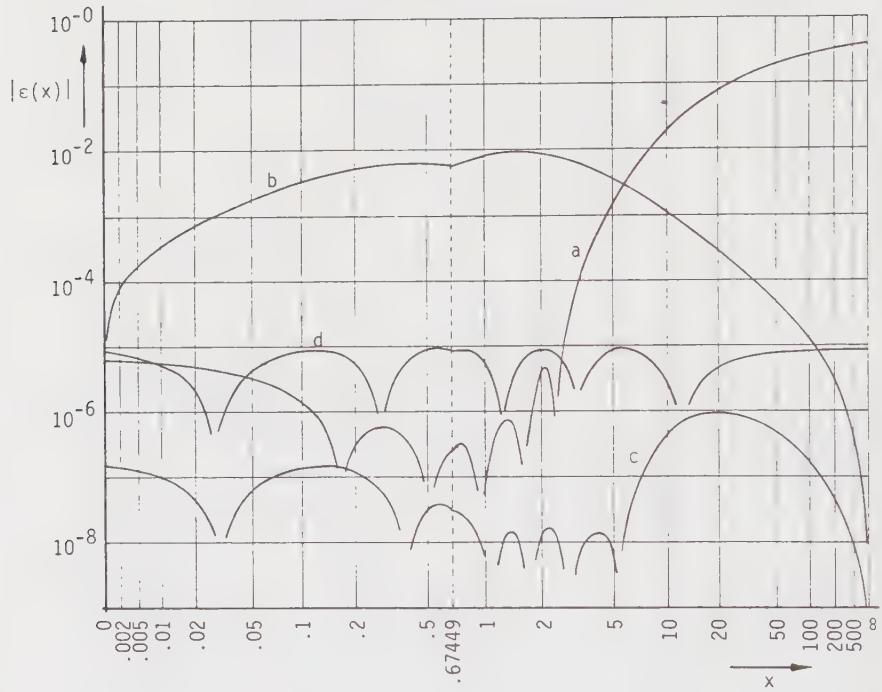


Bild A 10.1 : Relativer Fehler verschiedener Approximationen
a: /45/, Blatt 45
b: /46/, Approx. 4 aus Bild 2
c: /47/ (11 Koeff.)
d: Optimierter Kettenbruchansatz (6 Koeff.)

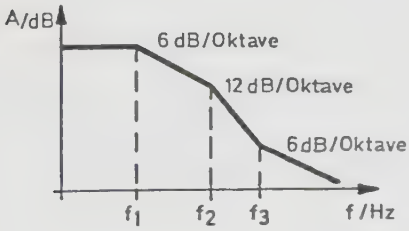
A.11 Eigenschaften der ADM mit Silbenkompandierung

Spezifizierte Größen / Eigenschaften

- Abtastfrequenz 16 / 32 kHz
- Adaptionsalgorithmus
  - Mustererkennung 3 Bit
  - Kompandierungsgeschwindigkeit
    (Zeitverhalten MLA - Integrator)

    90 % - Wert entsprechend RC - Glied mit $\tau = 4\,ms \pm 1\,ms$
- Kompandierungsumfang

  $\frac{C\,max}{Co} = 50 \;\hat{=}\; 34\,dB$
- Integrierendes Netzwerk



f_1 = 250 Hz .... 300 Hz

f_2 (wahlweise) $\approx$ 2700 Hz

f_3 (wahlweise) $\approx$ 6400 Hz

- Nennaussteuergrenze

  bei 800 Hz - Sinus ps = - 4 dBm

  Stufenhöhe C = 50·Co

- Einfügungsdämpfung (Verstärkung)

  0 dB

LITERATURVERZEICHNIS

/1/ Greenstein, L.J.:
Slope Overload Noise in Linear Delta Modulators With Gaussian Inputs.
Bell Syst. Tech. J. 51(1972), S. 2101 - 2137.

/2/ Schlitt, H.; Dittrich, F.:
Statistische Methoden der Regelungstechnik.
Bibliographisches Institut, Mannheim 1972.

/3/ Rabiner, L.R.; Crochiere, R.E.; Allen, J.B.:
FIR System Modeling and Identification in the Presence of Noise and Bandlimited Inputs.
Transact. IEEE ASSP-26 (1978), S. 319 - 333.

/4/ Schuon, E.; Wolf, H.:
Nachrichten-Meßtechnik.
Springer Verlag, Berlin 1981.

/5/ Schlitt, H.:
Statistische Verfahren der Regelungs- und Nachrichtentechnik.
Vorlesung am Institut für Regelungstechnik, Erlangen 1976.

/6/ Abramowitz, M.; Stegun, I.A.:
Handbook of Mathematical Functions.
Dover, New York 1970.

/7/ Kolb, H.J.; Schüßler, H.W.:
Measuring the Frequency Responce of Systems With Digital Techniques.
Proc. IEE 129, Part F (1982), S. 341 - 346.

/8/ Kolb, H.J.:
A Signalprocesser Using Bit-Slice Elements for the Audio-Frequency Range.
SIGNALPROCESSING 2 (1980), S. 339 - 346.

/9/ Saal, R.:
Handbuch zum Filterentwurf.
AEG-Telefunken, Frankfurt 1979.

/10/ Schüßler, H.W.:
Digitale Systeme zur Signalverarbeitung.
Springer Verlag, Berlin 1973.

/11/ Brehm, H.; Jüngst, E.W.; Wolf, D.:
Simulation von Sprachsignalen.
AEÜ 28 (1974), S. 445 - 450.

/12/ Oetken, G.:
Ein Beitrag zur Interpolation mit digitalen Filtern.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr.33
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen, 1978.

/13/ Oetken, G.; Parks, T.W.; Schüßler, H.W.:
New Results in the Design of Digital Interpolators.
Transact. IEEE ASSP-23 (1975), S. 301 - 309.

/14/ Storch, L.:
Systhesis of Constant-Time-Delay Ladder Networks using Polynomials.
Proc. IRE 42 (1954), S. 166 - 1675.

/15/ Dehner, G.F.:
Ein Beitrag zum rechnergestützten Entwurf rekursiver digitaler Filter minimalen Aufwands.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 23
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen 1978.

/16/ Kammeyer, K.D.:
Analyse des Quantisierungsfehlers bei der Verteilten Arithmetik.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 29
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen 1977.

/17/ Dehner, G.:
Programm for the Design of Recursive Digital Filters.
Programms for Digital Signal Processing.
Digital Signal Processing Committee / IEEE ASSP-Society, Kap. 6.1-1 - 6.1-105.

/18/ Biey, M.; Premoli, A.:
A New Class of Multiple-Critical-Pole Equal-Ripple Rational Functions for the Design of Cascaded RC-Active Filters with Low Q-Factors.
Transact. IEEE CAS-25 (1978), S. 19 - 26.

/19/ Modena, G.:
A Mathematical Model of an Artifical Signal for the Testing of Digital Speech Transmission Systems.
CSELT Rapporti Tecnici 6 (1978), S. 47 - 54.

/20/ Brehm, H.:
Stochastische Modellfolgen.
Vortrag beim DFG-Kolloquium "Digitale Signalverarbeitung", Erlangen, 1977.

/21/ Brehm, H.:
Sphärisch invariante stochastische Prozesse.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 47
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen, 1981

/22/ Schlitt, H.:
Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen.
Vieweg, Braunschweig, 1968.

/23/ Peschl, E.:
Funktionen - Theorie I
Biliographisches Institut, Mannheim, 1967.

/24/ Deczky, A.:
Program for Minimum-p Synthesis of Recursive Digital Filters. Programs for Digital Signal Processing.
Digital Signal Processing Committee / IEEE ASSP - Society, Kap. 6.2-1 - 6.2-38.

/25/ Hänel, H.:
Zur digitalen Erzeugung von Zufallszahlen mit vorgeschriebener Verteilungsdichte.
AEÜ 35 (1981), S. 156 - 162.

/26/ Rader, C.M.:
A New Method of Generating Gaussian Random Variables by Computer.
IEEE International Convention Digest, 1970.

/27/ Rowe, I.H.; Kerr, I.M.:
A Broad-Spectrum Pseudo-Random Gaussian Noise Generator.
Transact. IEEE AC-15 (1970), S. 529 - 535.

/28/ Maritsas, D.G.:
A High Speed Accuracy Digital Gaussian Generator of Pseudorandom Numbers.
Transact. IEEE C-22 (1973), S. 629 - 634.

/29/ Büttner, M.; Eckhardt, B.; Oetken, G.:
Meßtechnik in der seriellen digitalen Signalverarbeitung.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 22.
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen, 1976.

/30/ Golomb, S.W.:
Shift Register Sequences.
Holden-Day, San Francisco, 1967.

/31/ Laugwitz, D.:
Ingenieur - Mathematik I.
Biliographisches Institut, Mannheim, 1964.

/32/ Tomlinson, G.H.; Galvin, P.:
Generation of Gaussian Signals from Summed m-Sequences.
Electronics Letters 11 (1975), S. 521 - 522.

/33/ Gilson, R.P.:
Some Results of Amplitude Distribution Experiments on Shift Register Generated Pseudo-Random Noise.
Transact. IEEE C-15(1966), S. 926 - 927.

/34/ Schweikert, R.; Brehm, H.; Wolf, D.:
Lineare Filterung stochastischer Folgen mit voneinander statistisch unabhängigen Elementen.
NTG-Fachberichte 65 (1978). S. 352 - 356.

/35/ Gaugg, A.; Seidel, M.; Weinrichter, H.:
Grenzen der Eignung von PN-Signalen für statistische Tests.
AEÜ 27 (1973), S. 30 - 36.

/36/ Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik.
Harry Deutsch, Frankfurt/M., 1983, S. 183.

/37/ Eier, R.:
Nachbildung kontinuierlicher Verteilungen mit Hilfe von diskreten Zufallsprozessen.
Frequenz 33 (1979), S. 195 - 199.

/38/ Yiu, K.P.:
A Simple Method for the Determination of Feedback Shift Register Connections for Delayed Maximal-Length Sequences
Proc. IEEE 68 (1980), S 537 - 538.

/39/ Flanagan, J.L.:
Speech Analysis Synthesis and Perception.
Springer Verlag, Berlin, 1972, S. 163.

/40/ Davies, A.C.:
Properties of Waveforms Obtained by Nonrecursive Digital Filtering of Pseudorandom Binary Sequences.
Transact. IEEE C-20 (1971), S. 270 - 281.

/41/ Fredericson, S.:
Pseudo-Randomness Properties of Binary Shift Register Sequences.
Transact. IEEE IT-21 (1975), S. 115 - 120.

/42/ Wolf, D.:
Analytische Beschreibung von Sprachsignalen
AEÜ 31 (1977), S. 392 - 398.

/43/ Gast, H.:
Differentielle - Pulscode - Modulation.
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Universität Erlangen-Nürnberg, 1976.

/44/ Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.:
Table of Integrals, Series and Produkts.
Academic Press, New York, 1965, S. 683 - 684, 897.

/45/ Hastings, C., jr.:
Approximations for Digital Computers.
Priceton Univ. Press, Priceton, New York, 1955.

/46/ Börjesson, P.O.; Sundberg, C.-E.W.:
Simple Approximation of the Error Function Q(x)
for Communications Applications.
Transact. IEEE COM-27 (1979), S. 639 - 643.

/47/ Patry, J.; Keller, J.:
Zur Berechnung des Fehlerintegrals.
Num. Math. 6 (1964), S. 89 - 97.

/48/ Hölzler, E.; Holzwarth, H.:
Pulstechnik Band I.
Springer Verlag, Berlin, 1975.

/49/ Jäger, W.:
Übertragungseigenschaften eines PCM-Systems.
Studienarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Universität Erlangen-Nürnberg, 1979.

/50/ Schwarz, D.:
Entwurf und Aufbau eines Deltamodulators.
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Universität Erlangen-Nürnberg, 1974.

/51/ Glasbergen, J.W.; Schwarz, D.:
Vielseitiger monolithischer Schaltkreis zur Sprachdigitalisierung mit adaptiver Deltamodulation.
TEKADE Technische Mitteilungen, 1981, S. 50 - 54.

/52/ Jayant, N.S.:
A First-Order Markov Model for Understanding Delta-Modulation Noise Spectra.
Transact. IEEE COM-26 (1975), S. 1316 - 1318.

/53/ O'Neal, J.B., jr.:
Deltamodulation Quantizing Noise Analytical and Computer Simulation Results for Gaussian and Television Input Signals.
Bell Syst. Tech. J. 45 (1966), S. 117 - 141.

/54/ Van de Weg, H.:
Quantizing Noise of a Single Integration Delta Modulation System with an N-Digit Code.
Philips Res. Rep. 8 (1953), S. 367 - 385.

/55/ Steele, R.:
SNR Formula for Linear Delta Modulation with Band-Limited Flat and RC-Shaped Gaussian Signals.
Transact. IEEE COM-28 (1980), S. 1977 - 1984.

/56/ Aaron, M.R.; Gleischmann, J.S.; McDonald, R.A.; Protonotarios. E.N.:
Response of Delta Modulation to Gaussian Signals.
Bell Syst. Tech. J. 48 (1969), S. 1167 - 1195.

Lebenslauf

9. 1. 1951	geboren in Nürnberg
1957 - 1965	Volksschule in Nürnberg
1965 -1969	Fernmeldelehrling bei der Deutschen Bundespost in Nürnberg
1969	Fernmeldehandwerker bei der DBP in Nürnberg
1967 - 1970	Berufsaufbauschule Nürnberg Abschluß: Mittlere Reife
1970 - 1973	Studium an der Fachhochschule Nürnberg, Fachrichtung Allg. Elektrotechnik, Abschluß: Ing. grad.
1973 - 1977	Studium an der Universität Erlangen-Nürnberg Fachrichtung Elektrotechnik
1977	Abschluß des Studiums mit Diplomarbeit
1978 - 1981	Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Universität Erlangen-Nürnberg
1981 - 1985	Entwicklungsingenieur bei der Fa. Gossen in Erlangen
seit 1985	Abteilungsleiter bei der Fa. BBC-Metrawatt in Nürnberg

Horst Hänel

(Horst Hänel)

Druck: Copy Center 2000 Obere Karlstraße 30 8520 Erlangen